

UNIVERSITE DE NANCY
FACULTE DES SCIENCES

* * *

Numéro d'Enregistrement au C. N. R. S. : AO4859

* * *

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences de Nancy
pour obtenir le grade de
Docteur-Ingénieur

par

M I C H E L V É R O N

Ingénieur I. N. S. A. (LYON)

* * *

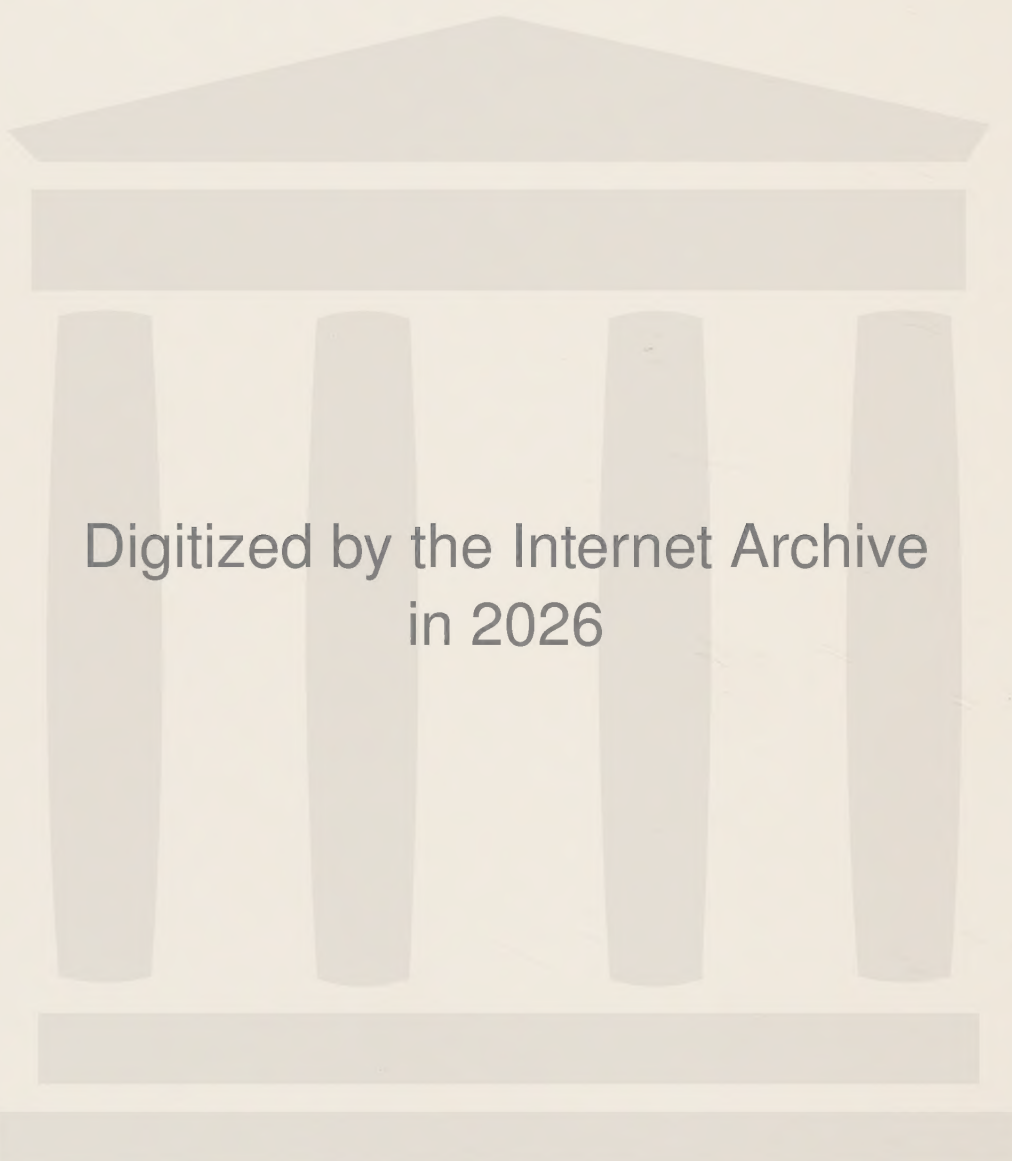
METHODE DE SIMULATION NUMERIQUE D'UN SYSTEME
PHYSIQUE PAR FORMULATION RECURRENTE DEDUITE
DE LA TRANSFORMEE EN z .

* * *

soutenue le 12 novembre 1970, devant la Commission d'Examen :

Messieurs	J. BARRIOL,	Président.
	J. LEGRAS,	Examineur.
	R. MEZENECV,	Examineur.
	A. FRÜHLING,	Rapporteur.

* * *



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551919_0009

METHODE DE SIMULATION

NUMERIQUE D'UN SYSTEME PHYSIQUE

PAR FORMULATION RECURRENTE DEDUITE

DÉ LA TRANSFORMÉE EN z



Année scolaire 1970-1971

DOYEN : M. AUBRY

ASSESEUR : M. GAY

Doyens honoraires : MM. CORNUBERT - ROUBAULT.

Professeurs honoraires : MM. RAYBAUD, LAFFITTE, LERAY, JOLY, LAPORTE, EICHHORN, CAPELLE, GODEMENT, DUBREIL, L. SCHWARTZ, DIEUDONNE, LETORT, DODE, GAUTHIER, GOUDET, OLMER, CORNUBERT, CHAPELLE, GUERIN, WAHL.

Maîtres de Conférences honoraires : MM. LIENHART, PIERRET.

PROFESSEURS

MM. ROUBAULT	Géologie	HADNI	Physique
VEILLET	Biologie Animale	*BASTICK	Chimie
BARRIOL	Chimie Théorique	DUCHAUFOR	Pédologie
BIZETTE	Physique	GARNIER	Agronomie
GUILLIEN	Electronique	NEEL	Chimie Orga. Indus.
LEGRAS	Mécanique Rationnelle	BERNARD	Géologie Appliquée
BOLFA	Minéralogie	*CHAMPIER	Physique
NICLAUSE	Chimie	*GAY	Chimie Biologique
FAIVRE	Physique Appliquée	STEPHAN	Zoologie
AUBRY	Chimie Minérale	*CONDE	Zoologie
COPPENS	Radiogéologie	*WERNER	Botanique
DUVAL	Chimie	EYMARD	Calcul Différentiel et Int.
FRÜHLING	Physique	FELDEN	Physique
HILLY	Géologie	*GOSSE	Mécanique Physique
LE GOFF	Génie Chimique	*DAVOINE	Physique (ENSMIM)
SUHNER	Physique Expériment.	HORN	Physique (1er Cycle)
CHAPON	Chimie Biologique	*ROCCI	Géologie
HEROLD	Chimie Minérale Indus.	*Mme LUMER	Mathématiques
SCHWARTZ B.	Exploitation Minière	DELPUECH	Chimie Physique
*MALAPRADE	Chimie	Melle HUET	Analyse Supérieure
MANGENOT	Botanique	BLAZY	Minéralogie Appliquée
GAYET	Physiologie	CAUBERE	Chimie Organique
		VUILLAUME	Psychophysiologie
		ALAIS	Chimie Biologique

N.....	Mécanique Appliquée
N.....	Méthodes Mathématiques de la Physique
N.....	Mécanique Rationnelle

(*) Professeur titulaire à titre personnel.

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mme BASTICK	Chimie P. C. Epinal	JANOT	Physique P. C. Epinal
MM. GUDEFIN	Physique	CACHAN	Entomologie Appl. (ENSA)
FRENTZ	Biologie Animale	JACQUIN	Pédologie et Chimie Agr.
MARI	Chimie (ISIN)	MAINARD	Physique M. P.
DEVIOT	Physique du Solide	MARTIN	Chimie P. C.
FLECHON	Physique P. C.	PAULMIER	Mécanique Expérimentale
VIGNES	Métallurgie	PROTAS	Minéralogie
JURAIN	Géologie C. B. G.	RIVAIL	Chimie Appliquée (CUCES)
BALESDENT	Thermodynamique, Chimie Appliquée (ENSIC)	DEPAIX	Probabilités et Statis- tiques.

MAITRES DE CONFERENCES

MM. VILLERMAUX	Génie Chimique	CASTRO	Chimie Organique
METCHE	Biochimie Appliquée (Brasserie)	DEXHEIMER	Botanique
BAUMANN	Physique 1er Cycle	NOVERRAZ	Mathématiques
DURAND	Physique	TOURET	Géologie
GRANGE	Physique (ISIN)	MALENGE	Chimie (ENSIC)
BAVEREZ	Chimie (ENSIC)	GROSS	Chimie Organique
CHAMBON	Exploitation Minière (ENSMIM)	LOCHON	Chimie Organique
HUSSON	Physique (ENSEM)	N.....	Mathématiques Appl.
WEISSLINGER	Physique	N.....	Mathématiques
GERL	Physique (ENSMIM)	N.....	Mathématiques
ROQUES	Chimie Minérale	N.....	Mathématiques
FERRIER	Mathématiques	N.....	Physiologie animale
GILORMINI	Mécanique des Fluides (ISIN)	N.....	Laiterie (Ecole Laiterie)
HILY	Mathématiques P. C.	N.....	Mathématiques Appl.
		N.....	Pétrographie
			Mathématiques
			Physique (aérotherm.)
			ISIN

CHARGES D'ENSEIGNEMENT

MM. AMARIGLIO, COËURE, DAVRAINVILLE, GIRARDEAU, OVAERT,
RUYER, WEBER, PUJOL, SCHREIBER, GEORGES, MARTIN, WEISBROD.

* *

*

* AVANT-PROPOS *

Ce travail a été réalisé au Laboratoire d'Electricité et d'Automatique de la Faculté des Sciences de Nancy.

Nous exprimons toute notre gratitude à Monsieur le Professeur A. FRÜHLING pour la bienveillance qu'il nous a toujours manifestée et l'aide efficace qu'il n'a cessé d'apporter dans l'exécution de ce travail.

Nous sommes très reconnaissant à Monsieur le Professeur J. BARRIOL qui nous fait l'honneur de présider le Jury d'examen.

Nous remercions tout aussi vivement Messieurs les Professeurs J. LEGRAS, Directeur de l'Institut Universitaire de Calcul Automatique de Nancy, et R. MEZENCEV, qui par leurs remarques et suggestions constructives ont grandement amélioré ce travail, et ont bien voulu faire partie de ce Jury, Monsieur MEZENCEV venant de loin.

Nous adressons tous nos remerciements à Madame FRÜHLING dont l'aimable et souriante diligence a permis la présentation de ce mémoire, ainsi qu'à Monsieur B. DITER pour le soin qu'il a apporté dans l'exécution des figures.

Nous savons gré à tous nos camarades et plus particulièrement à P. MARTIN et J. -P. MUSSE, du groupe Commande Numérique, pour l'atmosphère amicale qu'ils contribuent à faire régner au Laboratoire.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION.	page 1
CHAPITRE I - RAPPELS SUR LES FONCTIONS ECHANTILLONNEES.	3
I. 1. Fonction échantillonnée	
I. 2. Approximation de l'échantillonnage par impulsion	
I. 3. Transformée en z	
I. 4. Fonction de transfert échantillonnée.	
CHAPITRE II - PRINCIPE DE LA METHODE.	10
II. 1. Fonction génératrice d'un organe de calcul numérique	
II. 2. Application à la simulation d'un système linéaire	
a) Solution forcée	
b) Régime libre	
CHAPITRE III - BLOQUEURS.	23
III. 1. Bloqueur d'ordre zéro	
III. 2. Bloqueur d'ordre un	
III. 3. Exemple de calcul des coefficients. Application.	
CHAPITRE IV - COMPARAISON AVEC LES AUTRES METHODES.	28
IV. 1. Méthodes classiques	
a) Méthodes à pas libre	
b) Méthodes à pas liés	
c) Comparaison	
IV. 2. Méthode de la double transformée en $J/\mathcal{L}P$.	
CHAPITRE V - PRECISION. INFLUENCE DE LA PERIODE D'ECHANTILLONNAGE.	43
V. 1. Résolution par méthode récurrente.	
V. 2. Erreur de chute	
V. 3. Erreur totale	

CHAPITRE VI - SIMULATION D'UN SYSTEME DU 4 ^{ème} ORDRE	53
a) Système étudié	
b) Valeurs numériques. Résultats.	
CHAPITRE VII - EXTENSION AUX SYSTEMES NON LINEAIRES.	55
VII. 1. Réponses de quelques éléments non linéaires	
VII. 2. Etude d'un circuit RLC à inductance fortement non linéaire	
VII. 3. Simulation de l'équation de Van der Pol.	
CONCLUSION.	69
BIBLIOGRAPHIE.	71.
ANNEXES.	

* *

*

INTRODUCTION.

La simulation de systèmes, ou ce qui revient au même, la résolution des équations différentielles correspondantes est fondamentale en particulier en automatique, pour l'étude du comportement des installations.

La résolution numérique présente de grands avantages pour sa souplesse d'emploi et sa vitesse de traitement. Les nombreux programmes développés aussi bien par les constructeurs de calculateurs [1] que par les utilisateurs [2] [3] font appel aux méthodes d'intégration telles que celles des trapèzes, de Kutta Runge ou de Simpson [4] [5] [6], pour lesquelles le pas d'intégration réalise un compromis entre l'erreur de chute et l'erreur systématique, et dont le choix reste souvent délicat.

La transformée en z [7] [8], transformée de Laplace des systèmes échantillonnés, fournit un outil puissant, connu depuis longtemps [9]. Cependant, l'inversion de la transformée de la grandeur de sortie $Y(z) = H(z).X(z)$, de la forme

$$y^*(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{1}{T} Y\left(\frac{\text{Log } z}{T}\right) z^{n-1} dz$$

(Γ contour entourant les pôles de $Y(z)$)

nécessite un développement en série de $\text{Log } z$, ce qui revient, comme le montrent R. Boxer et S. Thaler [9], à intégrer par l'une des méthodes énoncées précédemment, et exige pour $X(z)$ la connaissance a priori de la suite infinie des échantillons $x^*(nT)$. Le calcul de $Y(z)$ et son inversion est donc à faire pour chaque nouvelle fonction d'entrée $x(t)$.

Cet inconvénient n'existe pas en simulation analogique où le montage, une fois réalisé, fournit la solution pour des conditions initiales et une excitation quelconques. C'est pourquoi nous proposons de transposer le schéma analogique en système échantillonné, dont la transformée en z est alors identifiée à la fonction génératrice d'un organe de calcul numérique.

On obtient ainsi une relation de récurrence, caractéristique de l'équation à résoudre ou du système à simuler qui comme on le verra, décrit rigoureusement le régime libre quelle que soit la période d'échantillonnage T et donne la solution forcée avec une très bonne précision.

Les coefficients nécessaires à la récurrence, introduits d'une façon systématique, sont simples à calculer grâce aux tableaux de transformée en z et peuvent être comparés à ceux que propose P. Jørgensen [10] à partir d'une double transformation en $J/\mathcal{C}P$.

La méthode proposée ajoute ainsi les avantages du calcul numérique aux possibilités du calcul analogique.

* *

CHAPITRE I - RAPPELS SUR LES FONCTIONS ECHANTILLONNEES.

I.1. Fonction échantillonnée.

Soit $f(t)$ une fonction continue du temps, de transformée de

$$\text{Laplace } F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) \cdot dt .$$

Le processus d'échantillonnage consiste à prélever régulièrement la valeur de $f(t)$ à des instants séparés entre eux de la période T .

Un échantillonneur réel ayant un temps de fermeture fini, la largeur γ des échantillons est finie.

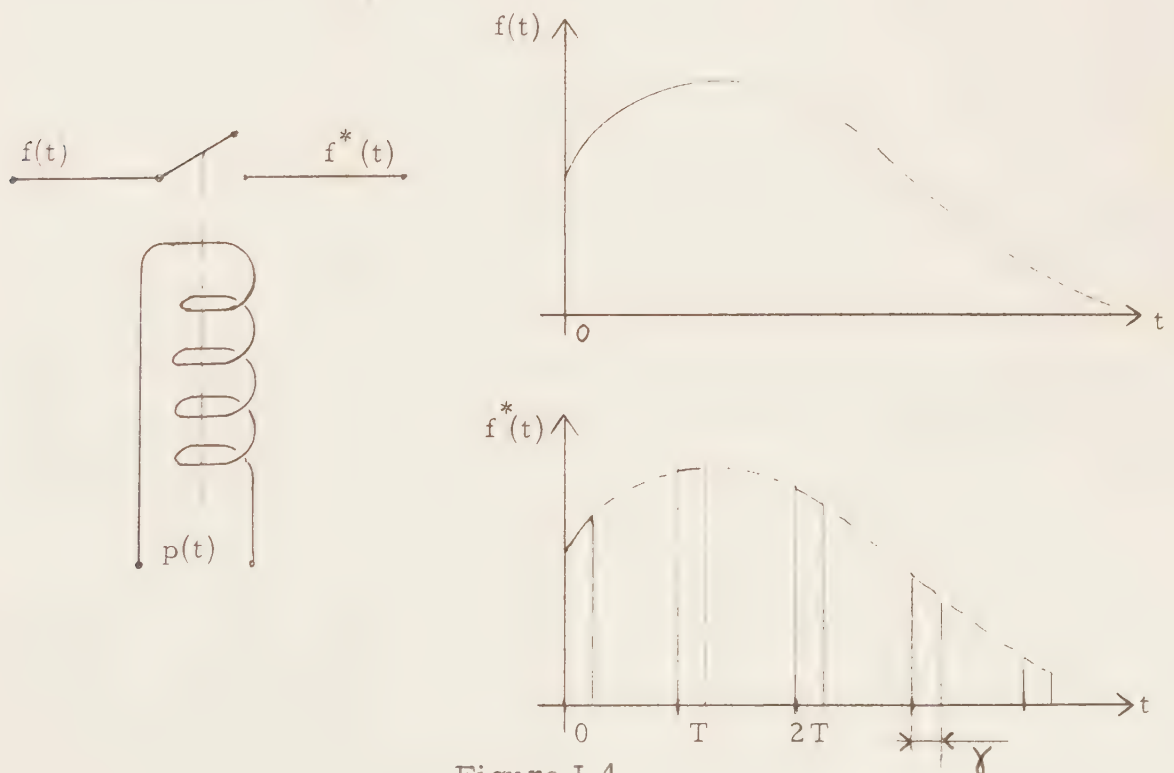


Figure I.1.

La fonction échantillonnée obtenue , $f^*(t)$, est le produit de $f(t)$ par la fonction d'échantillonnage $p(t)$.

I. 2. Approximation de l'échantillonnage par impulsion.

Si la durée γ de l'échantillonnage est suffisamment petite par rapport à T ou bien, dans le cas qui nous intéresse plus directement, où l'échantillon prend la forme d'un nombre représentant la valeur de $f(t)$ à l'instant considéré, on assimile la fonction d'échantillonnage à une suite régulière de fonctions de Dirac $\delta(t)$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$$

La fonction $f^*(t)$ dont seules les valeurs aux instants T , $2T$, nT , sont à considérer, devient

$$f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \cdot \delta(t-nT)$$

ou

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \cdot \delta(t-nT) \quad (\text{I. 1})$$

dans l'hypothèse où la fonction $f(t)$ est nulle pour $t < 0$, ce qui est toujours possible, les conditions initiales résumant alors le passé des systèmes considérés.

I. 3. Transformée en z .

a) Définition.

La transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac survenant à l'instant nT étant e^{-nTs} , la fonction échantillonnée précédente a pour

transformée

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nTs}$$

où s n'apparaît que par le terme e^{-Ts} , que l'on pose égal à z ,

$$z = e^{-Ts}$$

La transformée de la suite d'échantillons s'appelle alors "transformée en z "

$$F(z) = F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} \quad (I. 2)$$

Cette somme infinie converge usuellement [11] ainsi que le montre son expression

$$F(z) = \sum_{\text{pôles de } F(r)} \text{Résidus} \left[\frac{F(r)}{1 - e^{rT} z^{-1}} \right] \quad (I. 3)$$

avec

$$F(r) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-rt} dt$$

Cette somme (I. 3) explicite la transformée en z indépendamment du déroulement du temps, son intérêt étant de se mettre sous la forme d'un rapport de polynôme fini en z^{-1} , d'ordre au plus égal à celui de $F(s)$.

b) Propriétés.

Les propriétés de la transformée en z que nous utiliserons sont [13] :

$$\text{Si} \quad Z[f_1(t)] = F_1(z) \quad \text{et} \quad Z[f_2(t)] = F_2(z)$$

$$Z[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(z) + F_2(z)$$

$$Z\left[\sum_{k=0}^n f_1[(n-k)T] \cdot f_2(kT)\right] = F_1(z) \cdot F_2(z)$$

Si $f(t)$ est retardée de k périodes, soit $f(t - kT)$, on a

$$Z[f(t - kT)] = Z[e^{-kTs} F(s)] = z^{-k} F(z)$$

Si $f(t)$ est avancée de m périodes, soit $f(t + mT)$, on a

$$Z[f(t + mT)] = z^m F(z) - z^m f(0) - z^{m-1} f(T) - \dots - z f[(m-1)T]$$

c) Transformées en z usuelles (pages 336-338 de [11]).

$f(t)$	$F(s)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	$z^{-0} = 1$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{T z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s + a}$	$\frac{1}{1 - e^{-aT} \cdot z^{-1}}$
$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s + a)^2}$	$\frac{T \cdot e^{-aT} \cdot z^{-1}}{(1 - e^{-aT} \cdot z^{-1})^2}$
$e^{-at} \cdot \cos bt$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + b^2}$	$\frac{1 - e^{-aT} \cos bT \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot e^{-aT} \cos bT \cdot z^{-1} + e^{-2aT} \cdot z^{-2}}$
$e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(s + a)^2 + b^2}$	$\frac{e^{-aT} \sin bT \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot e^{-aT} \cos bT \cdot z^{-1} + e^{-2aT} \cdot z^{-2}}$

I. 4. Fonction de transfert échantillonnée.

Considérons un système linéaire de fonction de transfert $H(s)$ qui est aussi l'image de la réponse impulsionnelle $h(t)$. Soumis au signal échantillonné $x^*(t)$, il fournit le signal continu $y(t)$, que nous échantillonnons au synchronisme, obtenant ainsi $y^*(t)$ (figure I. 2).

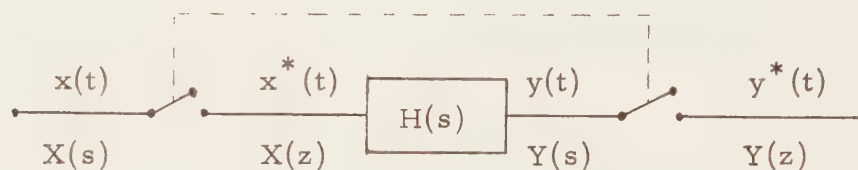


Figure I. 2.

Le signal $y(t)$ est la superposition linéaire des réponses impulsionnelles aux échantillons $x(0), x(T), \dots, x(nT), \dots$ (figure I. 3).

Puisque pour

$$0 \leq t < T \quad \text{on a} \quad y(t) = x(0) \cdot h(t)$$

$$T \leq t < 2T \quad y(t) = x(0) \cdot h(t) + x(T) \cdot h(t-T)$$

$$\vdots$$

$$nT \leq t < (n+1)T \quad y(t) = x(0)h(t) + x(T)h(t-T) + \dots + x(nT)h(t-nT)$$

Aux instants d'échantillonnage où est considéré $y^*(t)$, on a à la sortie

$$y(0) = y_0 = x(0) \cdot h(0)$$

$$y(T) = y_1 = x(0)h(T) + x(T)h(0)$$

$$\vdots$$

$$y(nT) = y_n = x(0)h(nT) + x(T)h(nT-T) + \dots + x(kT)h[(n-k)T] + \dots + x(nT) \cdot h(0)$$

ce qui met en évidence la contribution à l'instant nT de l'impulsion survenue à l'instant antérieur kT .

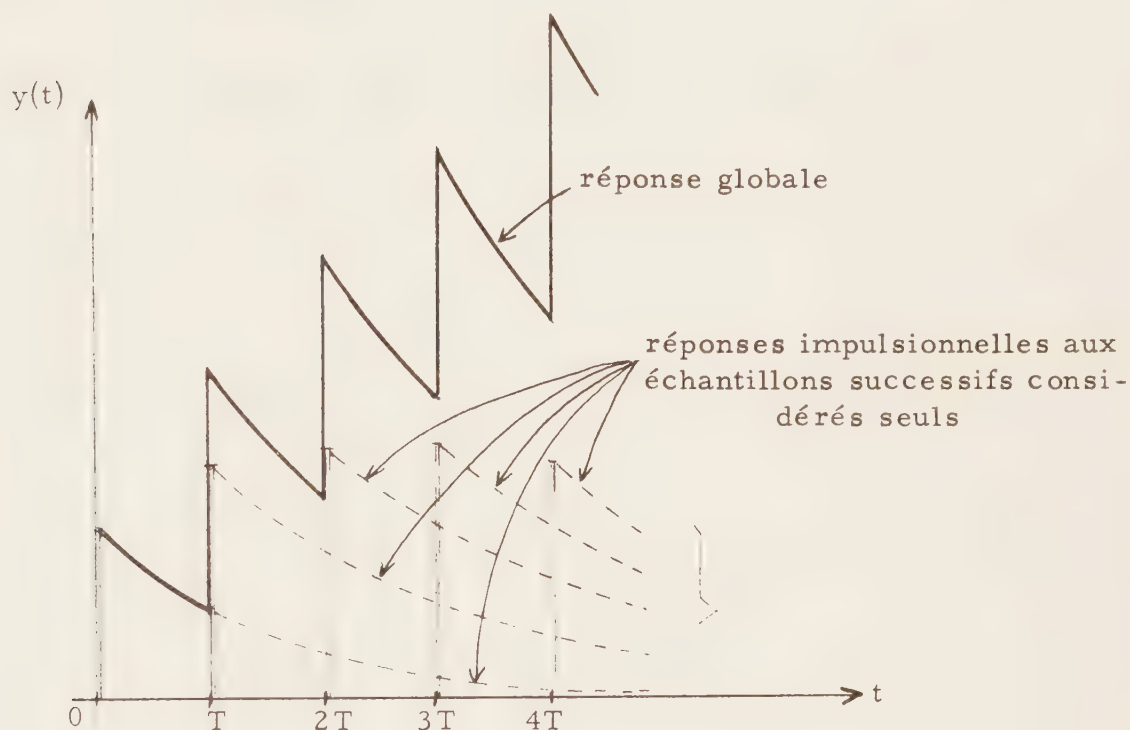


Figure I.3.

L'expression de l'échantillon $y(nT)$ est donc

$$y(nT) = \sum_{k=0}^n x(kT)h[(n-k)T] \quad (\text{I. 4})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)h[(n-k)T] \quad (\text{I. 5})$$

la sommation étant étendue jusqu'à l'infini puisque $h[(n-k)T] = 0$ par définition, pour $(n-k) < 0$.

Cette dernière expression est la forme discrète du produit de convolution des fonctions $x(t)$ et $h(t)$.

La transformée en z de $y^*(t)$,

$$Z [y^*(t)] = Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT) z^{-n}$$

s'écrit, en remplaçant $y(nT)$ par son expression (I. 5)

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) h[(n-k)T] z^{-n}$$

soit, avec $u = n-k$, pour éliminer n

$$Y(z) = \sum_{u=-k}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) h(uT) z^{-u} z^{-k}$$

Mais comme $h(uT)$ est nul pour $u < 0$, on ramène à zéro la borne inférieure de la première sommation, d'où

$$Y(z) = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) h(uT) z^{-u} z^{-k}$$

soit

$$Y(z) = \sum_{u=0}^{\infty} h(uT) z^{-u} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}, \quad (\text{I. 6})$$

produit dans lequel, si on l'effectuait, il faudrait remarquer que u n'est pas indépendant de k , ($u = n-k$).

L'intérêt de l'expression (I. 6) est de mettre en évidence la transformée $X(z)$ du signal d'entrée $x(t)$ et la transformée $H(z)$ de la réponse impulsionnelle $h(t)$, transmittance en z du système

$$H(z) = \sum_{u=0}^{\infty} h(uT) z^{-u} \quad (\text{I. 7})$$

On obtient ainsi, pour les systèmes échantillonnés, la même relation que pour les systèmes continus

$$Y(z) = H(z) X(z) \quad (\text{I. 8})$$

L'inversion de cette expression pour repasser à la suite $y(nT)$ suppose la connaissance a priori de $X(z)$, donc de la suite infinie des échantillons $x(nT)$, ce qui évidemment ne permet pas sous cette forme une simulation du système en temps réel.

Nous allons montrer qu'on peut procéder autrement.

* *

CHAPITRE II - PRINCIPE DE LA METHODE.

II.1. Fonction génératrice d'un organe de calcul numérique.

Un organe de calcul numérique [11], effectuant des opérations arithmétiques symbolisées par "D" sur une suite de nombres $r^*(t)$, qui se présentent régulièrement de T en T , fournit une autre suite de nombres $c^*(t)$, synchrone de la suite d'entrée mais décalée d'une durée égale au temps de calcul Δ .

Soit r_n le nombre "entrant" à l'instant courant nT et c_n le nombre sortant à l'instant $(nT + \Delta)$, reliés entre eux par une équation aux différences

$$c_n + \beta_1 c_{n-1} + \dots + \beta_j c_{n-j} + \dots + \beta_\ell c_{n-\ell} = \alpha_0 r_n + \alpha_1 r_{n-1} + \dots + \alpha_j r_{n-j} + \dots + \alpha_k r_{n-k} \quad (\text{II.1})$$

dans laquelle les nombres relatifs à l'instant $(n-j)T$ ont été retardés par mise en mémoire de j périodes.

En écrivant cette équation pour tous les instants nT , n variant de zéro à l'infini, on obtient

$$\begin{array}{lll}
 \text{pour} & n = 0 & c_0 = \alpha_0 r_0 \\
 & n = 1 & c_1 + \beta_1 c_0 = \alpha_0 r_1 + \alpha_1 r_0 \\
 & n = 2 & c_2 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_0 = \alpha_0 r_2 + \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_0 \\
 & \dots & \dots \\
 & n & c_n + \beta_1 c_{n-1} + \dots + \beta_\ell c_{n-\ell} = \alpha_0 r_n + \alpha_1 r_{n-1} + \dots + \alpha_k r_{n-k}
 \end{array}$$

On remarque que les suites de chacune des colonnes sont identiques, mais multipliées pour c par $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\ell$ et retardées respectivement d'une, deux, ..., ℓ périodes et de même pour r .

En prenant alors les transformées en z des suites de chaque colonne, on obtient

$$C(z) + \beta_1 z^{-1} C(z) + \dots + \beta_\ell z^{-\ell} C(z) = \alpha_0 R(z) + \alpha_1 z^{-1} R(z) + \dots + \alpha_k z^{-k} R(z)$$

soit

$$C(z) [1 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_\ell z^{-\ell}] = R(z) [\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_k z^{-k}] \quad (\text{II. 2})$$

Les transformées $C(z)$ et $R(z)$ des suites c^* et r^* qui sont des nombres, sont les fonctions génératrices de ces suites.

L'opération "D" qui correspond à la relation de récurrence (II.1) est donc caractérisée par la fonction génératrice $D(z)$, telle que

$$D(z) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_k z^{-k}}{1 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_\ell z^{-\ell}} = \frac{C(z)}{R(z)} \quad (\text{II. 3})$$

Inversement, si un système, nécessairement linéaire et stationnaire, a pour transmittance la fraction rationnelle

$$G(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_\ell z^{-\ell}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_d z^{-d}} \quad (\text{II. 4})$$

on peut très simplement obtenir la réponse temporelle à une entrée quelconque en identifiant les fonctions échantillonnées d'entrée $x^*(t)$ et de sortie $y^*(t)$, aux suites numériques $r^*(nT)$ et $c^*(nT)$ et la transmittance $G(z)$ à la fonction génératrice $D(z)$ (figure II. 1) [12]

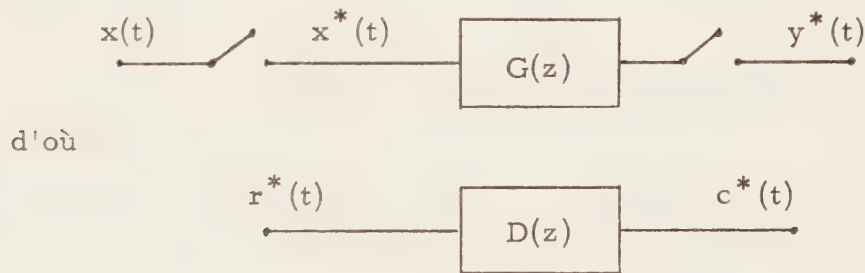


Figure II. 1.

On est ainsi conduit immédiatement à la récurrence

$$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_\ell x_{n-\ell} - b_1 y_{n-1} - b_2 y_{n-2} - \dots - b_d y_{n-d} \quad (\text{II. 5})$$

Cette récurrence est caractéristique de $G(z)$.

En effet, pour le système de transmittance $G(z)$, la relation $Y(z) = G(z). X(z)$, soit

$$\sum_{n=0}^{\infty} y(nT) z^{-n} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_\ell z^{-\ell}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_d z^{-d}} \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}$$

donne

$$(y_0 + y_1 z^{-1} + \dots + y_j z^{-j} + \dots)(1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_d z^{-d}) = (a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_\ell z^{-\ell})(x_0 + x_1 z^{-1} + \dots + x_j z^{-j} + \dots) \quad (\text{II. 6})$$

En identifiant en z on a donc les relations itératives

$$\begin{aligned}
 y_0 &= a_0 x_0 \\
 y_1 + b_1 y_0 &= a_0 x_1 + a_1 x_0 \\
 y_2 + b_1 y_1 + b_2 y_0 &= a_0 x_2 + a_1 x_1 + a_2 x_0 \\
 &\dots\dots\dots \\
 y_n + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2} + \dots + b_d y_{n-d} &= a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_\ell x_{n-\ell}
 \end{aligned} \tag{II. 7}$$

Les coefficients de l'équation aux différences (II.1) de la forme (II.5) sont ainsi bien ceux de la transmittance $G(z)$ du système.

Le calcul de y_n n'exige pas de développement en série, comme ce serait le cas pour l'inversion de $Y(z) = G(z)X(z)$ et la résolution peut avoir lieu en temps réel, puisque la valeur de sortie y_n ne tient compte que des valeurs passées et présente de $x^*(t)$. Un autre avantage est que la fonction $x(t)$ peut être quelconque, par exemple un signal de capteur, dont la transformée $X(z)$ serait impossible à déterminer.

II.2. Application à la simulation d'un système linéaire et stationnaire.

Considérons un système défini par l'équation différentielle

$$A_0 x(t) + A_1 \frac{dx}{dt} + \dots + A_i \frac{d^i x}{dt^i} = y(t) + B_1 \frac{dy}{dt} + \dots + B_j \frac{d^j y}{dt^j} \tag{II. 8}$$

liant la grandeur de sortie $y(t)$ à l'excitation $x(t)$.

En passant aux transformées de Laplace unilatérales, on obtient, en prenant des valeurs nulles pour $x(t)$ et ses $(i-1)$ dérivées successives à l'instant $t = 0^+$:

$$\begin{aligned}
X(s) [A_0 + A_1 s + \dots + A_i s^i] &= Y(s) + B_1 [s Y(s) - y(0)] \\
&\quad - B_2 [s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)] \\
&\quad + B_j [s^j Y(s) - s^{j-1} y(0) - \dots - y^{(j-1)}(0)].
\end{aligned}$$

La sortie cherchée est donc

$$\begin{aligned}
Y(s) &= X(s) \frac{A_0 + A_1 s + \dots + A_i s^i}{D(s)} + y(0) \frac{B_1 + B_2 s + \dots + B_j s^{j-1}}{D(s)} \\
&\quad + y^{(q)}(0) \frac{B_{q+1} + B_{q+2} s + \dots + B_j s^{j-q-1}}{D(s)} \\
&\quad + y^{(j-1)}(0) \frac{B_j}{D(s)},
\end{aligned}$$

soit

$$Y(s) = X(s)H(s) + y(0)H^0(s) + \dots + y^{(q)}(0)H^q(s) + y^{(j-1)}(0)H^{j-1}(s) \quad (\text{II. 9})$$

avec

$$\left. \begin{aligned}
D(s) &= 1 + B_1 s + B_2 s^2 + \dots + B_j s^j \\
H(s) &= (A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \dots + A_i s^i)/D(s) \\
H^q(s) &= (B_{q+1} + B_{q+2} s + \dots + B_j s^{j-q-1})/D(s).
\end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 10})$$

Cette relation met en évidence la solution forcée et l'évolution libre du système due aux valeurs initiales $y(0)$, $y'(0)$, ..., $y^{(j-1)}(0)$.

Il lui correspond le schéma analogique de la figure II.2, où $u(t)$ est l'échelon unité et δ la Distribution de Dirac, $f(t)$ la réponse à l'entrée $x(t)$ du système au repos et $g^q(t)$ la réponse de $H^q(s)$ à l'impulsion $y^q(0)$.

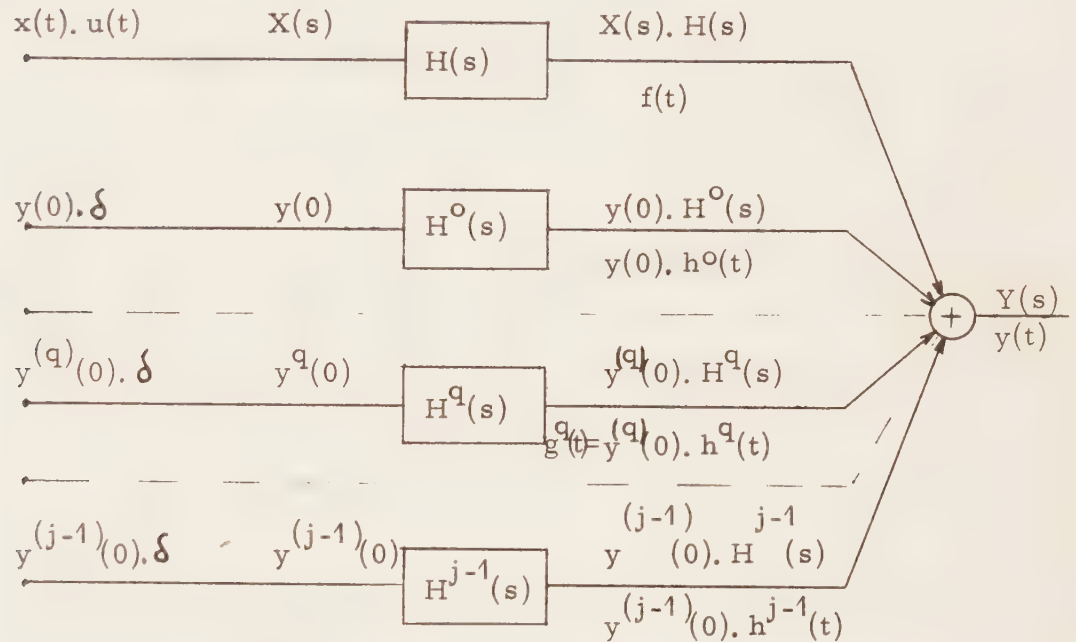


Figure II.2

Pour la résolution numérique, nous ne considérons les différentes fonctions qu'aux instants $t = nT$, ce qui donne le système à échantillonneurs synchrones de la figure II.3, où le bloqueur de transmittance $B(s)$ sert à reconstituer $x(t)$ selon $x_f(t)$ à partir des échantillons $x^*(t)$.

La seule approximation ainsi faite est d'assimiler $x_f(t)$ à $x(t)$; l'indice b de $f_b^*(t)$ rappelle que cette fonction est la réponse échantillonnée à l'entrée "bloquée" $x_f(t)$.

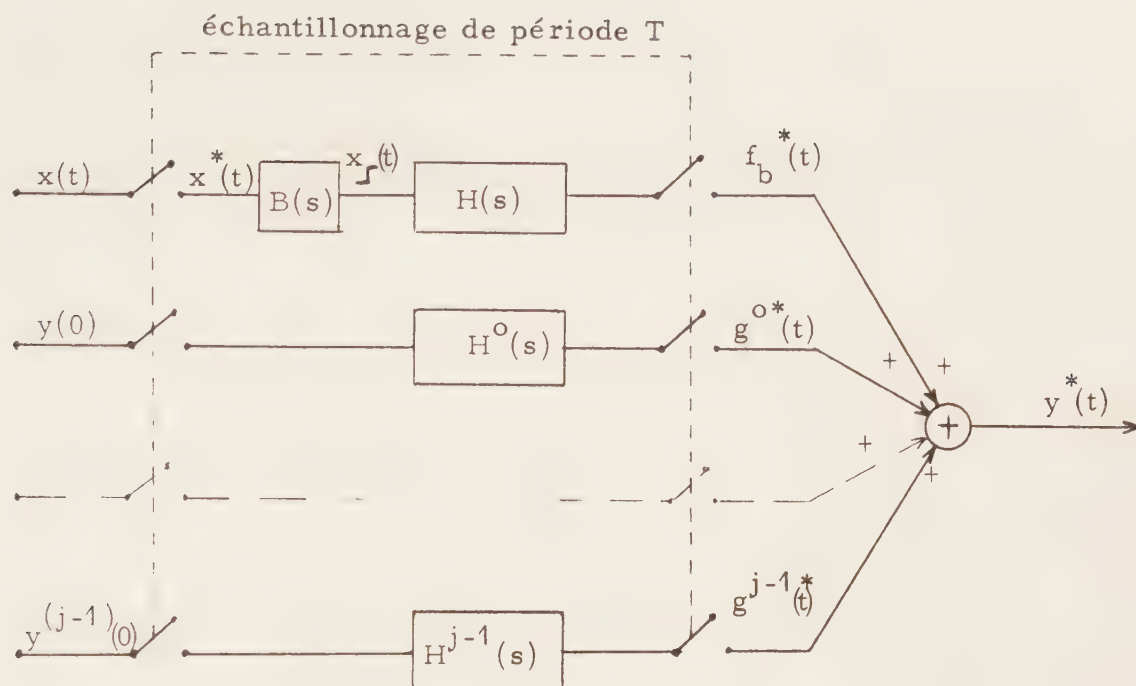


Figure II. 3

La fonction $x(t)$ est ainsi remplacée par un développement en série de Taylor au voisinage de $t = nT$:

- en posant $t = nT + \zeta$, on a

$$x(nT + \zeta) = x(nT) + \zeta x'(nT) + \frac{\zeta^2}{2!} x''(nT) + \dots \quad (\text{II. 11})$$

Le blocage le plus simple consiste évidemment à ne considérer que le premier terme du développement [13]

$$x(nT + \zeta) \simeq x(nT)$$

ce qui est réalisé par le bloqueur d'ordre zéro, de transmittance $\frac{1 - e^{-Ts}}{s}$, qui maintient la valeur $x(nT)$ pendant toute la durée d'échantillonnage.

En identifiant alors les transmittances en z des éléments compris entre les échantillonneurs à des fonctions génératrices de bloc de calcul, on obtient les relations de récurrence qui fournissent la solution cherchée en $y(nT)$, que nous étudions en séparant les régimes forcé et libre (Fig. II. 4).

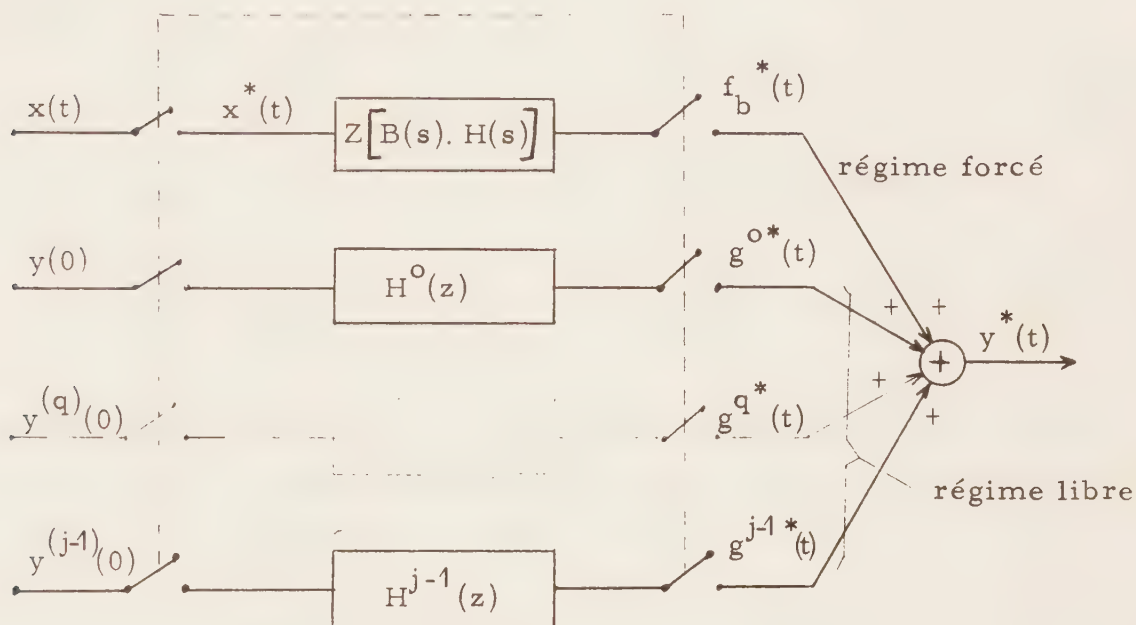


Figure II. 4

a) Solution forcée.

Pour le régime forcé, la transformée en z de $B(s) \cdot H(s)$ est de la forme

$$Z[B(s) \cdot H(s)] = \frac{p_0 + p_1 z^{-1} + \dots + p_k z^{-k}}{1 + q_1 z^{-1} + \dots + q_j z^{-j}}$$

ce qui donne la récurrence

$$f_b^* = p_0 \cdot x_n + p_1 \cdot x_{n-1} + \dots + p_k \cdot x_{n-k} - q_1 f_b^* - \dots - q_j f_b^* \quad (\text{II. 12})$$

Dans le cas de systèmes physiquement réalisables, le coefficient p_0 est nul.

Pour le montrer, supposons le système muni d'un bloqueur d'ordre zéro, de transmittance $B(s) = (1 - e^{-Ts})/s$ avec lequel on obtient, en appliquant le théorème du retard, la transformée en z de la chaîne

$$Z \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot H(s) \right] = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left[\frac{H(s)}{s} \right] \quad (\text{II.13})$$

En explicitant l'expression (II.10) de $H(s)$, on a

$$\frac{H(s)}{s} = \frac{1}{B_j} \left[\frac{A}{s} + \frac{B}{s - s_1} + \dots + \frac{K}{s - s_k} + \dots + \frac{J}{s - s_j} \right] \quad (\text{II.14})$$

où les s_k sont les racines de $D(s) = 0$ et à condition que $i \leq j$, pour les ordres de dérivations de l'équation initiale (II.8), ce qui est le cas des systèmes physiques pour lesquels $i < j$.

Les coefficients $A, B, \dots, J$ de la décomposition précédente donnent

$$A + B + \dots + K + \dots + J = A_j \quad (\text{II.15})$$

où A_j est nul d'après la remarque précédente.

Passant maintenant à $Z [H(s)/s]$, on obtient pour chacun des termes de (II.14) une transformée de la forme $\frac{K}{B_j} / (1 - e^{s_k T} \cdot z^{-1})$, ce qui entraîne, après réduction au même dénominateur l'annulation du facteur $A + B + \dots + J$ pour le terme de degré zéro en z^{-1} .

Comme ce résultat subsiste dans la multiplication par $(1 - z^{-1})$ pour avoir la transformée d'ensemble (II.13), le facteur p_0 de celle-ci est nul.

Ainsi dans la récurrence (II.12), la sortie f_{bn} ne dépend pas de la valeur de l'entrée au même instant mais uniquement des valeurs antérieures, et ce résultat, établi pour le bloqueur d'ordre zéro, subsiste pour les ordres plus élevés.

On remarque que le dénominateur de $Z[B(s).H(s)]$ est aussi celui de $Z[H(s)]$.

En effet, les relations (II.13) et (II.14) donnent

$$\begin{aligned}
 Z[B(s).H(s)] &= \frac{1-z^{-1}}{B_j} Z \left[\frac{A}{s} + \frac{B}{s-s_1} + \dots + \frac{K}{s-s_k} + \dots + \frac{J}{s-s_j} \right] \\
 &= \frac{1-z^{-1}}{B_j} \left[\frac{A}{1-z^{-1}} + \frac{B}{1-e^{s_1 T} z^{-1}} + \dots + \frac{K}{1-e^{s_k T} z^{-1}} + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \frac{J}{1-e^{s_j T} z^{-1}} \right] \\
 &= \frac{1}{B_j} \left[\frac{N(z)}{(1-e^{s_1 T} z^{-1})(1-e^{s_2 T} z^{-1}) \dots (1-e^{s_j T} z^{-1})} \right] \quad (\text{II.16})
 \end{aligned}$$

Le pôle à l'origine en s , introduit par le bloqueur est ainsi éliminé et il ne subsiste que les pôles de $H(s)$, ce résultat se généralisant pour un bloqueur d'ordre quelconque.

Le dénominateur de $Z[H(s)]$ est aussi celui de $H^0(z), \dots, H^{j-1}(z)$, d'après les expressions même de ces transmittances.

b) Régime libre.

Les entrées $y^q(0)$ étant impulsionnelles, les transmittances $H^q(s)$ ne sont pas précédées d'un bloqueur et les sorties $g^{q*}(t)$ correspondent rigoureusement, aux instants d'échantillonnage, aux valeurs $g^q(nT)$.

Les transmittances $H^q(s)$, dont on remarque que les degrés des numérateurs diminuent d'une unité chaque fois ont pour transformées en z

$$\begin{aligned}
 H^0(z) &= \frac{p_0^0 + p_1^0 z^{-1} + \dots + p_{j-1}^0 \cdot z^{-(j-1)}}{1 + q_1 z^{-1} + \dots + q_j z^{-j}} && \text{pour } H^0(s) \\
 H^1(z) &= \frac{p_1^1 z^{-1} + \dots + p_{j-1}^1 z^{-(j-1)}}{1 + q_1 z^{-1} + \dots + q_j z^{-j}} && \text{pour } H^1(s) \\
 &\vdots \\
 H^q(z) &= \frac{p_q^q z^{-q} + \dots + p_{j-1}^q z^{-(j-1)}}{1 + q_1 z^{-1} + \dots + q_j z^{-j}} && \text{pour } H^q(s)
 \end{aligned} \tag{II.17}$$

dont les numérateurs sont de degré $(j-1)$ en z^{-1} , ce qui est imposé par la décomposition en éléments simples des transmittances, alors que les coefficients de plus bas degré p_ℓ^q sont nuls pour $\ell < q$, comme nous allons le montrer pour $H^0(z)$ et $H^1(z)$.

Pour $H^0(z)$, on a

$$H^0(z) = \frac{1}{B_j} \left[\frac{A^0}{1 - e^{s_1 T} \cdot z^{-1}} + \frac{B^0}{1 - e^{s_2 T} \cdot z^{-1}} + \dots + \frac{J^0}{1 - e^{s_j T} \cdot z^{-1}} \right] \tag{II.18}$$

$$\text{avec } A^0 + B^0 + \dots + J^0 = B_j$$

$$\text{d'où } p_0^0 = \frac{B_j}{B_j} = 1$$

ce qui est évidemment nécessaire.

L'entrée $y(0)$ intervient ainsi explicitement jusqu'à l'instant $(j-1)T$ comme le montrent les calculs successifs

$$t = 0, \quad n = 0, \quad g_0^0 = 1 \cdot y(0)$$

$$t = T, \quad n = 1, \quad g_1^0 = p_1^0 y(0) - q_1 g_0^0$$

$$\vdots$$

pour $t = kT$, avec $k \leq j-1$

$$g_k^0 = p_k^0 y(0) - q_1 g_{k-1}^0 - q_2 g_{k-2}^0 - \dots - q_j g_{k-j}^0$$

pour $t = kT$, et $k > j-1$

$$g_k^0 = -q_1 g_{k-1}^0 - q_2 g_{k-2}^0 - \dots - q_j g_{k-j}^0$$

Pour $H^1(z)$, de même

$$H^1(z) = \frac{1}{B_j} \left[\frac{A^1}{1 - e^{s_1 T} z^{-1}} + \frac{B^1}{1 - e^{s_2 T} z^{-1}} + \dots + \frac{J^1}{1 - e^{s_j T} z^{-1}} \right] \quad (\text{II.19})$$

$$\text{avec } A^1 + B^1 + \dots + J^1 = 0$$

$$\text{d'où } p_0^1 = 0.$$

L'expression assez compliquée de p_1^1 est sans grand intérêt dans le cas général, on ne l'explicitera donc pas, mais on est certain d'avoir $p_1^1 \neq 0$.

Les calculs successifs sont

$$t = 0, \quad n = 0, \quad g_0^1 = 0$$

$$t = T, \quad n = 1, \quad g_1^1 = p_1^1 y'(0)$$

$$t = 2T, \quad n = 2, \quad g_2^1 = p_2^1 y'(0) - q_1 g_1^1$$

pour $t = kT$, avec $k \leq (j-1)$

$$g_k^1 = p_k^1 y'(0) - q_1 g_{k-1}^1 - q_2 g_{k-2}^1 - \dots - q_j g_{k-j}^1$$

et pour $k > (j-1)$

$$g_k^1 = -q_1 g_{k-1}^1 - q_2 g_{k-2}^1 - \dots - q_j g_{k-j}^1$$

En généralisant, on trouve que pour la dérivée d'ordre q , le premier terme non nul est p_q^q , ce qui signifie que les valeurs initiales, bien qu'introduites à l'instant zéro, n'interviennent que successivement aux instants $0, T, 2T, \dots, qT, \dots, (j-1)T$ et interviennent explicitement dans les calculs jusqu'à la $j^{\text{ième}}$ itération.

Les conditions initiales s'introduisent donc sans difficulté; pour chacune d'elles, il suffit de calculer les coefficients $p_q^q, \dots, p_{j-1}^q$, les autres, q_i , étant ceux de la récurrence relative à la solution forcée.

Les récurrences ainsi explicitées opèrent toujours sur un nombre fini de termes, dépendant de l'ordre de l'équation à résoudre et de l'ordre du bloqueur choisi. En effet, comme l'ensemble $B(s)H(s)$ a toujours un nombre fini de pôles, $Z [B(s).H(s)]$ se met sous la forme d'un rapport de polynômes finis en z^{-1} .

Les coefficients p et q qui caractérisent le système et définissent les récurrences se déduisent facilement des tableaux de transformées en z .

* *

CHAPITRE III - BLOQUEURS.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, le rôle du bloqueur est de reconstituer au mieux la fonction $x(t)$, selon $x_{\mathcal{F}}(t)$ à partir de la suite d'échantillons $x^*(t)$.

On approche ainsi $x(t)$ par un développement en série de Taylor au voisinage de $t = nT$; en posant $t = nT + \mathcal{T}$, on a

$$x(nT + \mathcal{T}) = x(nT) + \mathcal{T} x'(nT) + \frac{\mathcal{T}^2}{2!} x''(nT) + \dots \quad (\text{III.1})$$

A l'instant nT , les échantillons suivants n'étant pas connus, on évalue les dérivées successives avec les échantillons passés selon

$$x'(nT) \simeq \frac{1}{T} [x(nT) - x(n-1)T] \quad (\text{III.2})$$

La précision de la reconstitution est fonction du nombre de termes du développement, mais la complexité rapidement croissante des transmittances des bloqueurs et de leur réalisation fait qu'on se limite aux ordres zéro et un.

III.1. Bloqueur d'ordre zéro.

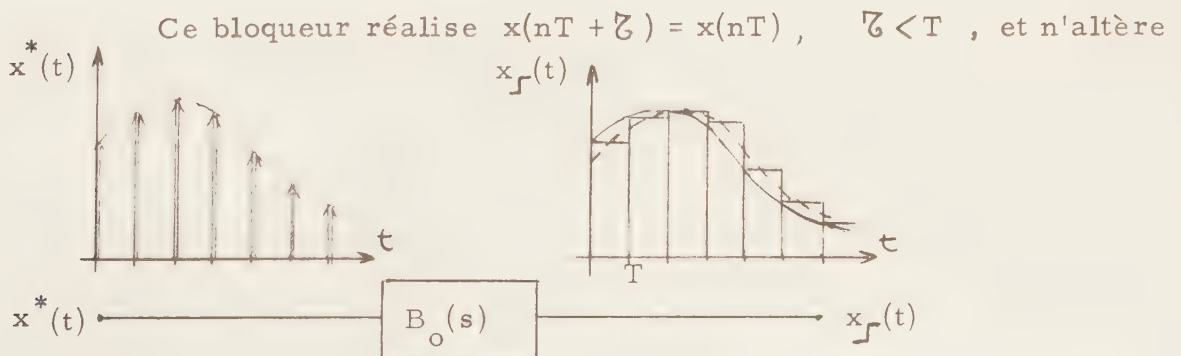


Figure III.1.

ainsi pas une entrée en échelon, tandis que pour une fonction $x(t)$ quelconque, il introduit en gros un retard de $T/2$ comme on peut le voir sur la figure ci-dessus.

Sa transmittance en s étant

$$B_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (\text{III. 3})$$

la transformée en z de $B_0(s) \cdot H(s)$ est alors, comme on l'a déjà vu,

$$Z[B_0(s)H(s)] = Z\left[\frac{H(s)}{s}\right] - Z\left[e^{-Ts} \frac{H(s)}{s}\right] = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{H(s)}{s}\right] \quad (\text{III. 4})$$

III.2. Bloqueur d'ordre un.

$$\text{Réalisant } x(nT + T) \simeq x(nT) + \frac{T}{T} [x(nT) - x(n-1)T] \quad (\text{III. 5})$$

ce bloqueur peut engendrer des discontinuités importantes [14] (Fig. III.2).

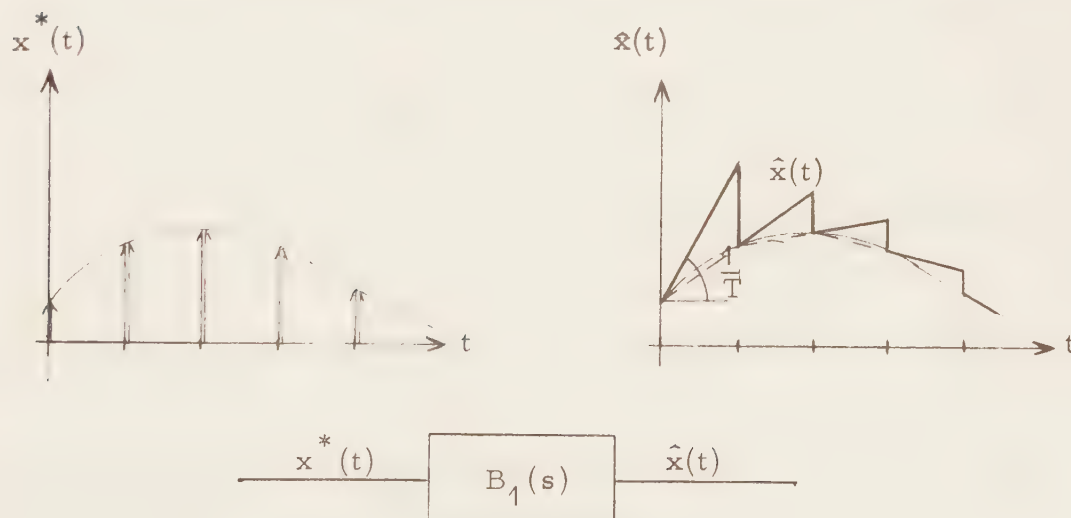


Figure III.2.

Une amélioration consiste à pondérer la dérivée en la multipliant par un facteur k de l'ordre de 0,3 ou 0,4, ce qui donne le "bloqueur d'ordre un à correction partielle de vitesse".

La transmittance est donnée par la transformée de la réponse impulsionnelle de ce bloqueur représentée par la figure III. 3.

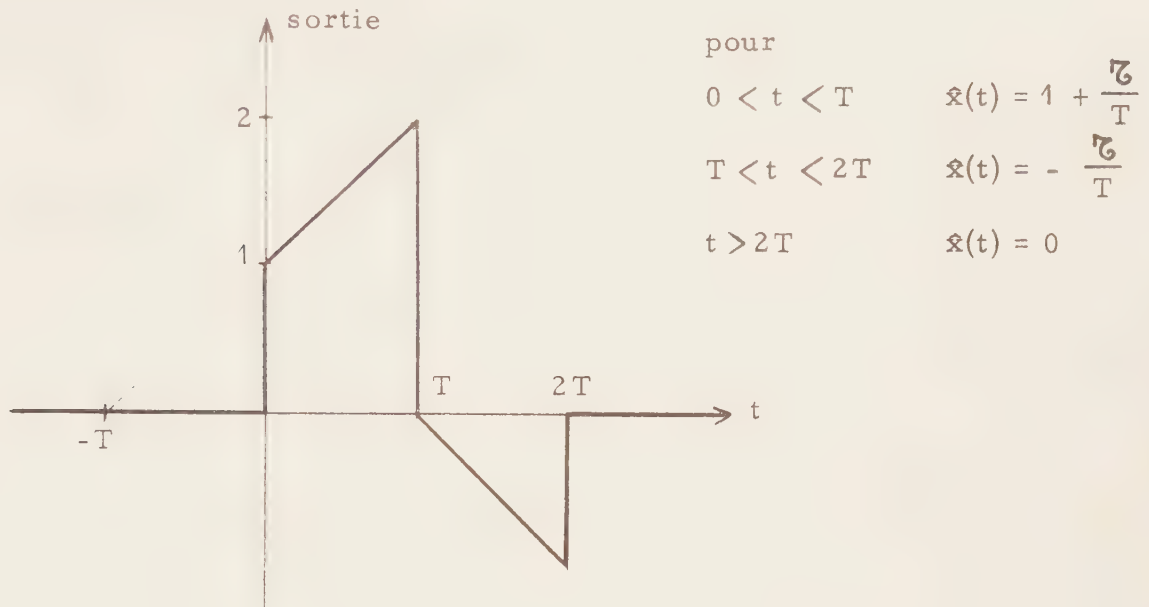


Figure III. 3.

D'où

$$B_1(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{Ts^2} - \frac{2}{s} e^{-Ts} - \frac{2}{Ts^2} e^{-Ts} + \frac{1}{s} e^{-2Ts} + \frac{1}{Ts^2} e^{-2Ts}$$

soit

$$B_1(s) = \frac{(1 + Ts)(1 - e^{-Ts})^2}{Ts^2} \quad (\text{III. 6})$$

La transformée en z de $B_1(s).H(s)$ est, compte tenu deux fois du théorème de retard,

$$Z [B_1(s).H(s)] = \frac{(1 - z^{-1})^2}{T} Z \left[\frac{(1 + Ts)H(s)}{s^2} \right] \quad (\text{III. 7})$$

ce qui complique le calcul des coefficients, comme nous allons le voir sur l'exemple suivant, pris à dessein très simple.

III. 3. Exemple de calculs des coefficients. Application.

Avec le système $H(s) = \frac{K}{\alpha s + 1}$, le bloqueur d'ordre zéro donne

$$G_0(z) = K(1 - z^{-1}) Z \left[\frac{\frac{1}{\alpha}}{s(s + \frac{1}{\alpha})} \right]$$

soit

$$G_0(z) = K \frac{(1 - e^{-T/\alpha})z^{-1}}{1 - e^{-T/\alpha} z^{-1}} \quad (\text{III. 8})$$

On a donc

$$\begin{aligned} p_0 &= 0 \\ p_1 &= K(1 - e^{-T/\alpha}) \\ q_1 &= -e^{-T/\alpha} \end{aligned} \quad (\text{III. 9})$$

et la récurrence relative à la solution forcée

$$y_n = p_1 x_{n-1} - q_1 y_{n-1} \quad (\text{III. 10})$$

Avec le bloqueur d'ordre un

$$G_1(z) = \frac{(1 - z^{-1})^2}{T} Z \left[\frac{(1 + Ts)H(s)}{s^2} \right] = \frac{(1 - z^{-1})^2}{T} Z \left[\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C/\alpha}{s + \frac{1}{\alpha}} \right] \quad (\text{III. 11})$$

avec $A = K$, $B = K(T - \alpha)$ et $C = -K\alpha(T - \alpha)$

En prenant la transformée de chaque élément de Z , on a

$$Z \left[\frac{(1 + Ts)H(s)}{s^2} \right] = \frac{AT z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} + \frac{B}{1 - z^{-1}} + \frac{C/\alpha}{1 - e^{-T/\alpha} z^{-1}}$$

d'où, en multipliant par $(1 - z^{-1})^2/T$ et en ordonnant,

$$G_1(z) = K \frac{z^{-1} \left[1 + \frac{T - \alpha}{T} (1 - e^{-T/\alpha}) \right] + z^{-2} \left[\frac{\alpha}{T} (1 - e^{-T/\alpha})^{-1} \right]}{1 - e^{-T/\alpha} z^{-1}} \quad (\text{III. 12})$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 p_0 &= 0 \\
 p_1 &= K \left[1 + \frac{T-\alpha}{T} (1 - e^{-T/\alpha}) \right] \\
 p_2 &= K \left[\frac{\alpha}{T} (1 - e^{-T/\alpha}) - 1 \right] \\
 q_1 &= -e^{-T/\alpha}
 \end{aligned} \tag{III.13}$$

On vérifie que les coefficients q du dénominateur sont indépendants du bloqueur et que, nécessairement, le bloqueur d'ordre un fait intervenir un terme de plus, p_2 , sur l'entrée.

Pour une entrée en échelon, on obtient successivement avec les bloqueurs d'ordre zéro et un, les sorties

$n = 1$

$$\text{avec } B_0 \quad y_{01} = 1 \cdot K \left[1 - e^{-T/\alpha} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \text{avec } B_1 \quad y_{11} &= 1 \cdot K \left[1 + \frac{T-\alpha}{T} (1 - e^{-T/\alpha}) \right] \\
 &= y_{01} + K \left[1 - \frac{\alpha}{T} (1 - e^{-T/\alpha}) \right]
 \end{aligned}$$

d'où, puisque y_{01} est la valeur rigoureuse de la sortie, l'erreur

$$\xi_1 = y_{11} - y_{01} = K \left[1 - \frac{\alpha}{T} (1 - e^{-T/\alpha}) \right]$$

$n = 2$

$$\text{avec } B_0 \quad y_{02} = 1 \cdot K \left[1 - e^{-T/\alpha} \right] + e^{-T/\alpha} y_{01}$$

$$\begin{aligned}
 \text{avec } B_1 \quad y_{12} &= 1 \cdot K \left[1 + \frac{T-\alpha}{T} (1 - e^{-T/\alpha}) \right] + 1 \cdot K \left[\frac{\alpha}{T} (1 - e^{-T/\alpha}) - 1 \right] \\
 &\quad + e^{-T/\alpha} y_{11} \\
 &= 1 \cdot K (1 - e^{-T/\alpha}) + e^{-T/\alpha} (y_{01} + \xi_1) \\
 &= y_{02} + e^{-T/\alpha} \xi_1
 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \xi_2 = e^{-T/\alpha} \xi_1$$

et pour n quelconque,

$$\text{avec } B_0 \quad y_{0n} = K(1 - e^{-T/\alpha}) + e^{-T/\alpha} y_{0n-1}$$

$$\text{avec } B_1 \quad y_{1n} = K(1 - e^{-T/\alpha}) + e^{-T/\alpha} y_{1n-1}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \xi_n &= e^{-T/\alpha} \cdot \xi_{n-1} \\ &= e^{-(n-1)T/\alpha} \cdot \xi_1 \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

L'erreur introduite par le bloqueur d'ordre un tend ainsi vers zéro lorsque n augmente.

* *

CHAPITRE IV - COMPARAISON AVEC LES AUTRES METHODES.

IV.1. Méthodes classiques.

Dans le domaine de la linéarité, les méthodes classiques [4] [15] permettent de résoudre les équations différentielles homogènes du type

$$0 = g_0(y, t) + g_1(y, t) \frac{dy}{dt} + \dots + g_i(y, t) \frac{d^i y}{dt^i} + \dots + \frac{d^j y}{dt^j} \quad (\text{IV.1})$$

décrivant le régime du système abandonné à lui-même, où les fonctions $g_0(y, t), \dots, g_i(y, t)$ sont continues et dérivables.

On se ramène à la résolution d'un système d'équations "simultanées" du premier ordre en posant

$$\frac{dy}{dt} = u_1$$

$$\frac{du_1}{dt} = u_2$$

$$\vdots$$

$$\frac{du_i}{dt} = u_{i+1}$$

et

$$\frac{du_{j-1}}{dt} = u_j = -g_0(y, x) - g_1(y, x) u_1 - \dots - g_i(y, x) u_i - \dots - g_{j-1}(y, x) u_{j-1} \quad (\text{IV. 2})$$

Le problème de base est donc l'intégration d'une équation du type

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t) \quad (\text{IV. 3})$$

dans laquelle t est la variable indépendante, qui prend les valeurs successives $t_0, t_0+h, \dots, t_0+nh$, h étant le pas d'intégration.

a) Méthodes à pas libre.

Approximation au second ordre (Méthode d'Euler modifiée).

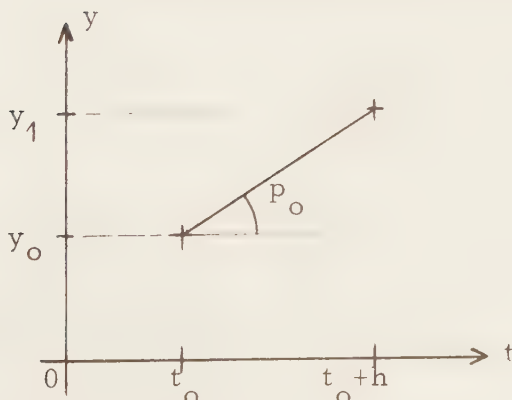


Figure IV.1.

Connaissant les valeurs initiales y_0, t_0 , on calcule

$$p_0 = f(y_0, t_0)$$

et en approchant l'arc de courbe $y(t)$ par un segment de droite, on a

$$y_1 = y_0 + p_0 h \quad (\text{IV. 4})$$

et ainsi de suite

$$y_{n+1} = y_n + p_n \cdot h$$

Approximation au troisième ordre.

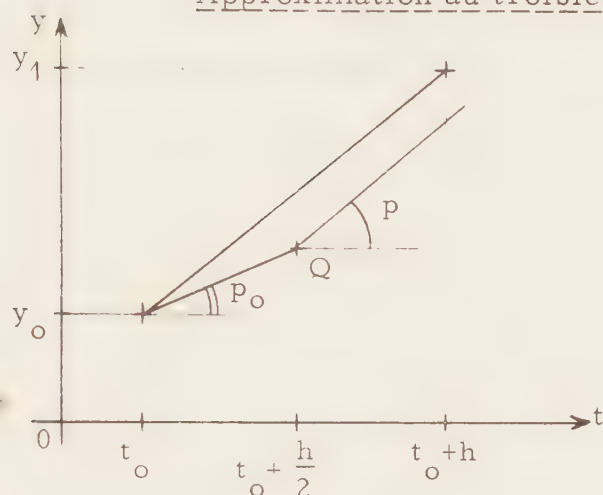


Figure IV.2.

Le point y_1 est donc

$$y_1 = y_0 + p \cdot h \quad (\text{IV. 6})$$

La méthode de Kutta Runge est une généralisation algébrique de ce principe.

Méthode d'Adams.

La courbe solution est remplacée par une équation dont le degré est fonction de la précision souhaitée.

Dans le cas d'une approximation par une fonction du 5^{ième} degré en h , on obtient

$$y_{n+1} = y_n + h \left[p_n + \frac{1}{2} \Delta p_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 p_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 p_{n-3} + \frac{251}{720} \Delta^4 p_{n-4} \right] \quad (\text{IV. 7})$$

avec

$$p_n = f(y_n, t_n)$$

$$\Delta p_{n-1} = p_n - p_{n-1}$$

$$\Delta^2 p_{n-2} = \Delta p_{n-1} - \Delta p_{n-2}$$

$$\Delta^3 p_{n-3} = \Delta^2 p_{n-2} - \Delta^2 p_{n-3}$$

$$\Delta^4 p_{n-4} = \Delta^3 p_{n-3} - \Delta^3 p_{n-4}$$

Les " Δ " sont les différences successives de p que l'on rencontre souvent dans les traités de calcul numérique.

On remarque que les termes successifs de l'équation (IV. 7) correspondent à l'approximation par une fonction de degré de plus en plus élevé.

Le programme de simulation S/360 CSMP [1] (Continuous System Modelling Program) de I. B. M. a été écrit d'après ce principe.

b) Méthodes à pas liés.

Par intégration des deux membres de l'équation (IV. 3), on obtient

$$y(t_n + h) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_n + h} f[y, t] dt \quad (\text{IV. 8})$$

On pose $F(t) = f[y(t), t]$ dont la valeur sera interpolée par un polynôme $F^*(t)$, défini par les valeurs $F_0, F_1, \dots, F_n$, ce qui suppose la connaissance de $y_0, y_1, \dots, y_n$ relatives aux valeurs $t_0, t_0 + h, \dots, t_0 + nh$ de la variable.

On remplace alors

$$\int_{t_n}^{t_n+h} f[y(t), t] dt$$

par

$$\int_{t_n}^{t_n+h} F^*(t) dt \quad (\text{IV. 9})$$

On peut soit extrapoler le polynôme $F^*(t)$ pour obtenir ses valeurs sur l'intervalle t_n, t_n+h , ce qui fournit $y(t_n+h)$ d'une façon explicite, soit, à partir de la valeur extrapolée

$$F_{n+1} = F(t_{n+1}) = f[y_{n+1}, t_{n+1}] \quad (\text{IV. 10})$$

en déduire y_{n+1} par approximations successives.

c) Comparaison.

Dans le cas où le premier membre de l'équation (IV.1) n'est pas nul mais fonction d'une excitation $x(t)$ et de ses i dérivées successives, le système d'équations simultanées (IV.2) doit être complété par des relations du premier ordre similaires relatives à cette excitation.

Les méthodes classiques d'intégration numérique, dont les principes viennent d'être rappelés, conduisent à une équation aux différences finies entre $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-j}$ et $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-i}$, dans laquelle les coefficients sont des polynômes en h , qui doit donc être choisi petit.

Par principe même, les résultats ne peuvent être qu'approchés, quel que soit le nombre de termes pris en considération dans les

développements utilisés. Ces techniques imposent d'autre part le changement en cours d'intégration de la méthode utilisée, en particulier au début du calcul où les premières valeurs nécessaires sont approchées par des méthodes dites d' "amorçage".

La méthode proposée fournit, comme on l'a vu, la solution rigoureuse du régime libre, quel que soit le pas d'intégration h (ou T), ce qui est un avantage notable.

Pour la solution forcée, elle se rapproche des méthodes classiques puisque la fonction $x(t)$ est alors remplacée par un développement en série de Taylor dont l'ordre du bloqueur fixe le nombre de termes. Ce remplacement constitue la seule approximation faite, puisque les récurrences obtenues fournissent le calcul de la réponse exacte à $x_{\int}(t)$ et ne sont pas les polynômes précédents en h (ou T) auxquels on se ramène cependant selon l'ordre choisi, en développant les exponentielles, comme le montre l'exemple suivant.

On notera en outre que dans le cas dégénéré d'une intégration pure, $x(t) = \frac{dy}{dt}$, donc d'une transmittance $H(s) = \frac{1}{s}$, le choix du bloqueur d'ordre zéro entraîne la relation de récurrence

$$y_{n+1} = T \cdot x_n + y_n$$

puisque

$$Z [B_o(s) \cdot H(s)] = \frac{T z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

ce qui revient à intégrer $x(t)$ telle qu'elle est reconstituée par le bloqueur, c'est-à-dire intégrer par la méthode des rectangles.

EXEMPLE.

Choisissons une équation du premier ordre, qui correspond au problème de base des méthodes classiques

$$K x(t) = y(t) + \alpha \frac{dy}{dt} \quad (\text{IV.11})$$

On a immédiatement, avec la solution proposée

$$Z [B_o(s)H(s)] = \frac{K(1 - e^{-T/\alpha})z^{-1}}{1 - e^{-T/\alpha} \cdot z^{-1}} \quad (\text{IV.12})$$

soit la récurrence

$$y_{n+1} = K(1 - e^{-T/\alpha})x_n + e^{-T/\alpha} \cdot y_n \quad (\text{IV.13})$$

En développant $e^{-T/\alpha}$, on a

$$y_{n+1} = K \left(\frac{T}{\alpha} - \frac{T^2}{2! \alpha^2} + \frac{T^3}{3! \alpha^3} - \dots \right) x_n + \left(1 - \frac{T}{\alpha} + \frac{T^2}{2! \alpha^2} - \frac{T^3}{3! \alpha^3} + \dots \right) y_n \quad (\text{IV.14})$$

Avec la méthode d'Euler, on obtient

$$\frac{dy}{dt} = \frac{K x(t) - y(t)}{\alpha} = f(y, t)$$

soit

$$y_{n+1} = y_n + \frac{K x_n - y_n}{\alpha} T$$

$$y_{n+1} = K \frac{T}{\alpha} x_n + \left(1 - \frac{T}{\alpha} \right) y_n \quad (\text{IV.15})$$

ce qui correspond bien à (IV.14) en ne considérant que deux termes du développement de $e^{-T/\alpha}$.

Avec la méthode de Kutta Runge à deux approximations, et en prenant $a = 1$ (Mineur - Techniques de calcul numérique, Dunod 1963, p.367)

$$k_1 = T f(y_n, nT) = T \frac{K x_n - y_n}{\alpha}$$

$$k_2 = T f(y_n + k_1, (n+1)T) = T \left(\frac{K}{\alpha} x_{n+1} - \frac{y_n}{\alpha} - T \frac{K x_n - y_n}{\alpha^2} \right)$$

puisque pour $t = (n+1)T$, $x(t)$ devient x_{n+1} .

On pose

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$$

soit

$$y_{n+1} = K \left[\frac{T}{2\alpha} - \frac{T^2}{2\alpha^2} \right] x_n + T \frac{K}{2\alpha} x_{n+1} + \left[1 - \frac{T}{\alpha} + \frac{T^2}{2\alpha^2} \right] y_n \quad (\text{IV.16})$$

Cette relation montre qu'il y a interpolation de $x(t)$ entre les instants nT et $(n+1)T$, ce qui n'est pas réalisable par échantillonnage et blocage, puisqu'à l'instant nT , la valeur de l'échantillon x_{n+1} n'est pas utilisé et n'est d'ailleurs pas connue pour les systèmes physiques non déterministes. On a vu que le bloqueur d'ordre un engendrait entre nT et $(n+1)T$ un signal de pente $(x_n - x_{n-1})/T$ et non pas $(x_{n+1} - x_n)/T$.

En imposant, cependant, les mêmes conditions que celles définies par le bloqueur d'ordre zéro, soit

$$x(nT + \tau) = x(nT) \quad \text{avec} \quad 0 < \tau \leq T$$

ou

$$x_{(n+1)-} = x_n$$

la relation (IV.16) devient

$$y_{n+1} = K \left(\frac{T}{\alpha} - \frac{T^2}{2\alpha^2} \right) x_n + \left(1 - \frac{T}{\alpha} + \frac{T^2}{2\alpha^2} \right) y_n$$

qui correspond bien aux premiers termes du développement de (IV.14).

IV.2. Méthode de la double transformée en J/τ_P .

Après avoir rappelé l'ambiguïté de la notation du taux de variation $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ de la grandeur V pendant l'accroissement Δt du temps, P. Jørgensen [10] propose de remplacer $\frac{\Delta}{\Delta t}$ par $\frac{J}{\tau_P}$, J et P étant des opérateurs qui indiquent les transformations à faire subir aux

variables qui les suivent, $\mathcal{Z}$ étant le module d'accroissement de la variable t (correspondant ainsi à la période d'échantillonnage T). L'opérateur J ordonne une différenciation correcte et P une bonne observation.

Soit $\Phi(t)$ l'excitation et $V(t)$ la grandeur de sortie d'un système défini par l'équation différentielle

$$\Phi(t) = A_0 \cdot V + A_1 \frac{dV}{dt} + \dots + A_n \frac{d^n V}{dt^n} \quad (\text{IV.17})$$

En décomposant en produit de systèmes du deuxième ordre, on est ramené à la résolution d'une équation du type

$$\Phi(t) = A_0 \cdot V + A_1 \frac{dV}{dt} + A_2 \frac{d^2 V}{dt^2} \quad (\text{IV.18})$$

L'opérateur J est défini par

$$J V(t) = b [V(t) - V(t - \mathcal{Z})] \quad (\text{IV.19})$$

et l'opérateur P , lorsqu'il agit sur $V(t)$, par

$$P V(t) = \frac{a}{2} [V(t) + V(t - \mathcal{Z})] \quad (\text{IV.20})$$

lorsqu'il agit sur $\Phi(t)$, on considère "un opérateur contracté P_c " tel que

$$P_c \Phi(t) = \Phi(t - c \mathcal{Z}) \quad (\text{IV.21})$$

avec $0 < c < 1$ et en général peu différent de $1/2$.

Pour mécaniser les calculs, Jørgensen pose

$$\mathcal{J} = \frac{J}{b} \quad \text{et} \quad \mathcal{P} = \frac{P}{a}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\mathcal{J} V(t) &= V(t) - V(t - \tau) \\ \mathcal{J}^2 V(t) &= \frac{1}{2} [V(t) + V(t - \tau)]\end{aligned}\quad (\text{IV.22})$$

Avec ces notations, l'équation (IV.17) devient

$$\ddot{\Phi}(t) = A_0 V(t) + A_1 \frac{b \mathcal{J}}{\tau a \mathcal{J}} V(t) + A_2 \frac{b^2 \mathcal{J}^2}{\tau^2 a^2 \mathcal{J}^2} V(t) \quad (\text{IV.23})$$

On pose alors $a_1 = b/a$, $a_2 = b^2/a^2$ respectivement appelé coefficient "Antidivergence" et "Antidilatation" des temps.

En réduisant au même dénominateur (IV.23), on a

$$\tau^2 \mathcal{J}_c^2 \ddot{\Phi}(t) = A_0 \tau^2 \mathcal{J}^2 V(t) + A_1 \tau a_1 \mathcal{J} \mathcal{J} V(t) + A_2 a_2 \mathcal{J}^2 V(t) \quad (\text{IV.24})$$

ce qui, en utilisant les relations (IV.22) pour en déduire les expressions des opérations $\mathcal{J}^2 V(t)$, $\mathcal{J} \mathcal{J} V(t)$ et $\mathcal{J}^2 V(t)$, conduit à

$$V(t) = \frac{\tau^2 \mathcal{J}_c^2}{\Gamma_0} \ddot{\Phi}(t) + S_1 V(t - \tau) + S_2 V(t - 2\tau) \quad (\text{IV.25})$$

Les coefficients S_1 et S_2 sont obtenus par identification avec la solution analytique du régime libre

$$V(t) = S_1 V(t - \tau) + S_2 V(t - 2\tau) \quad (\text{IV.26})$$

avec

$$S_1 = 2e^{-\alpha\tau} \cos \omega\tau \quad \text{et} \quad S_2 = e^{-2\alpha\tau}$$

où α et ω sont les parties réelle et imaginaire des racines de l'équation caractéristique $A_0 + \mathcal{J} A_1 + \mathcal{J}^2 A_2 = 0$.

On obtient alors les "Anti D"

$$a_1 = \frac{\omega_o^2 \cdot \tau_o^2}{2\alpha} \frac{\text{sh } \alpha \tau_o}{\text{ch } \alpha \tau_o - \cos \omega \tau_o}$$

$$a_2 = \frac{\omega_o^2 \cdot \tau_o^2}{4} \frac{\text{ch } \alpha \tau_o + \cos \omega \tau_o}{\text{ch } \alpha \tau_o - \cos \omega \tau_o}$$
(IV.27)

Pour le régime forcé, à partir de l'équation différentielle de départ et en appliquant la transformation en $J/\tau_o P$, on obtient pour l' "observation" de $\Phi(t)$

$$\mathcal{J}_c^n \Phi(t) = \frac{1}{n!} \sum_u \eta_{n,u} \Phi[t - (u + c)\tau_o]$$
(IV.28)

où on doit déterminer les termes η et le terme c . Pour cela, on choisit une fonction d'excitation du type échelon unité qui ne fait pas apparaître le terme c , ce qui permet d'identifier les η , ensuite on identifie c en prenant l'excitation choisie que l'on applique à un système du premier ordre, dont on connaît la réponse, mettant ainsi en évidence uniquement c .

Les idées directrices de cette double transformation sont semblables à celles que nous avons utilisées dans l'application de la transformée en z : l'opérateur d'observation P correspond à l'échantillonnage et l'opérateur J d'ordonnancement des différenciations aux termes z^{-1} , z^{-2} , z^{-j} qui ordonnent dans le temps les valeurs auxquelles ils sont affectés.

L'exemple suivant montre l'identité de l'expression des coefficients obtenus par les deux méthodes.

Exemple.

On propose de résoudre, à partir de $t = 0$, avec un pas $T = 0,1$, le système différentiel

$$\begin{array}{l|l} 1 & \frac{dx}{dt} = x - y \\ 2 & \frac{dy}{dt} = x + y \end{array} \quad (\text{IV. 29})$$

que P. Jørgensen utilise pour comparer ses résultats (*) à ceux obtenus par les méthodes classiques (**), avec les conditions initiales

$$y(0) = 1 \quad y(T) = 1,09964966$$

$$x(0) = 0 \quad x(T) = 0,1103331$$

dans lesquelles ne figure pas explicitement la valeur des dérivées.

La mise en équation se fait en éliminant y ou x : (IV.29.1)

donne

$$y = x - \frac{dx}{dt} \quad \text{soit} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}$$

d'où

$$2x - 2 \frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad (\text{IV. 30})$$

(IV.29.2) donne

$$x = \frac{dy}{dt} - y \quad \text{soit} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

d'où

$$2y - 2 \frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \quad (\text{IV. 31})$$

On obtient ainsi deux équations identiques en x ou y , seules les conditions initiales étant différentes de l'une à l'autre.

(*). Automatisme, Décembre 1968.

(**). H. Mineur, Techniques de calcul numérique, p. 397-405.

On a ainsi à résoudre

$$2v - 2 \frac{dv}{dt} + \frac{d^2 v}{dt^2} = 0 \quad (\text{IV. 32})$$

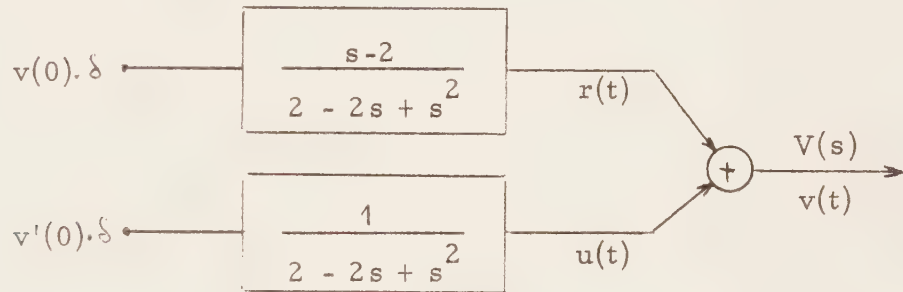
dont la transformée de Laplace est

$$2 V(s) - 2 [s \cdot V(s) - v(0)] + s^2 \cdot V(s) - s \cdot v(0) - v'(0) = 0$$

d'où

$$V(s) = \frac{s-2}{2-2s+s^2} v(0) + \frac{1}{2-2s+s^2} v'(0) \quad (\text{IV. 33})$$

ce qui fournit le schéma



Les transformées en z des transmittances ainsi mises en évidence sont

$$Z \left[\frac{s-2}{2-2s+s^2} \right] = \frac{1 - e^{-\alpha T} \left[\cos \omega T + \frac{2+\alpha}{\omega} \sin \omega T \right] z^{-1}}{1 - 2e^{-\alpha T} \cos \omega T z^{-1} + e^{-2\alpha T} z^{-2}} \quad (\text{IV. 34})$$

$$= \frac{p_0^o + p_1^o z^{-1}}{1 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}} \quad (\text{IV. 35})$$

et

$$Z \left[\frac{1}{2-2s+s^2} \right] = \frac{1/\omega e^{-\alpha T} \sin \omega T z^{-1}}{1 - 2e^{-\alpha T} \cos \omega T z^{-1} + e^{-2\alpha T} z^{-2}} \quad (\text{IV. 36})$$

$$= \frac{p_1^1 z^{-1}}{1 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}} \quad (\text{IV. 37})$$

expressions dans lesquelles α et ω sont obtenus en posant

$$s^2 - 2s + 2 = s^2 + 2\alpha s + \omega_o^2 \quad \text{et} \quad \omega^2 = \omega_o^2 - \alpha^2,$$

donc

$$\alpha = -1, \quad \omega = 1.$$

En remarquant que les entrées sont impulsionnelles, les calculs successifs sont

pour $t = 0$, $n = 0$

$$r_0 = p_0^0 v(0) = v(0) \quad (p_0^0 = 1)$$

$$u_0 = p_0^1 v'(0) = 0 \quad (p_0^1 = 0)$$

et
$$v_0 = r_0 + u_0 = v(0) \quad (\text{IV. 38})$$

pour $t = T$, $n = 1$

$$r_1 = p_1^0 v(0) - q_1 r_0$$

$$u_1 = p_1^1 v'(0)$$

ce qui entraînerait, si $v'(0)$ était connue

$$v_1 = (p_1^0 - q_1) v(0) + p_1^1 v'(0) \quad (\text{IV. 39})$$

Les conditions initiales imposant la valeur de $v(T)$, soit v_1 , cela revient à imposer $v'(0)$ dont la valeur peut être calculée par

l'expression

$$v'(0) = \frac{v(T) - (p_1^0 - q_1) v(0)}{p_1^1}$$

dont les développements des coefficients, limités au premier terme, donnent une expression approchée, vérifiant ainsi les calculs

$$\begin{aligned} p_1^0 - q_1 &= -e^{-\alpha T} \left(\cos \omega T + \frac{2 + \alpha}{\omega} \sin \omega T \right) + 2e^{-\alpha T} \cos \omega T \\ &= e^{-\alpha T} \cos \omega T - \frac{2 + \alpha}{\omega} \sin \omega T \end{aligned}$$

$$\simeq (1 - \alpha T) \left(1 - \frac{\omega^2 T^2}{2!} \right) - \left(\frac{2 + \alpha}{\omega} \right) \omega T$$

$$\simeq 1$$

$$\text{et pour } p_1 = \frac{e^{-\alpha T} \sin \omega T}{\omega}$$

$$\simeq T$$

$$\text{soit } v'(0) \simeq \frac{v(T) - v(0)}{T}$$

(IV. 40)

ce qui est bien l'expression approchée de la dérivée.

Pour $t \geq 2T$, les coefficients p_2 étant nuls, les conditions initiales n'interviennent plus directement et on a

$$r_2 = -q_1 r_1 - q_2 r_0$$

$$u_2 = -q_1 u_1$$

$$\text{soit } v_2 = -q_1 v_1 - q_2 v_0$$

ce qui est pour $n = 2$, l'expression de la récurrence générale

$$v_n = -q_1 v_{n-1} - q_2 v_{n-2}$$

$$\text{avec } q_1 = -2e^{-\alpha T} \cos \omega T$$

$$q_2 = e^{-2\alpha T}$$

(IV. 41)

expressions identiques à celles que propose P. Jørgensen.

La comparaison des valeurs numériques ne présente guère d'intérêt, mais il faut noter que les expressions (IV. 41) conduisent à des résultats nettement meilleurs que ceux obtenus par la méthode de Kutta Runge à quatre termes ou celle de la série de Taylor. à onze termes.

CHAPITRE V : PRECISION . INFLUENCE DE LA PERIODE D'ECHANTILLONNAGE.

Comme pour toute méthode d'intégration numérique, l'erreur est la somme de l'erreur de chute et de l'erreur systématique. Cette dernière n'intervient ici que sur la solution forcée, le régime libre étant rigoureux par principe même, ce qui permet de choisir les conditions initiales nulles pour l'étude de la précision.

L'erreur de chute dépend des opérations effectuées sur les nombres, de leurs grandeurs relatives et du nombre de chiffres significatifs qu'utilise l'ordinateur ; pour l'évaluer, nous choisirons d'abord une entrée en échelon, pour laquelle l'erreur systématique est nulle ; les résultats obtenus par récurrence pour différentes valeurs de la période d'échantillonnage seront comparés à la solution analytique.

Ensuite pour une entrée en rampe, particulièrement défavorable puisque l'erreur systématique est toujours de même sens, l'examen des résultats permettra de chiffrer l'erreur totale, sans y distinguer la part due à l'erreur de chute.

Le système choisi pour cette étude est du deuxième ordre pour les raisons suivantes :

- on sait en calculer les solutions analytiques
- une transmittance de degré élevé pouvant toujours être décomposée en éléments du premier et du deuxième ordres, ce choix n'enlève donc rien à la généralité des résultats.

Considérons donc la transmittance

$$H(s) = \frac{K(1 + \tau s)}{s^2 + \alpha s + \beta}$$

V.1. Résolution par méthode récurrente (transformée en z).

La transformée en z de $G(z) = Z [B_o(s).H(s)]$ dépend de la nature des racines de l'équation caractéristique

$$s^2 + \alpha s + \beta = 0$$

Calcul des coefficients :

a) Si $\Delta = \alpha^2 - 4\beta > 0$, on a les coefficients

$$\begin{aligned} p_0 &= 0 \\ p_1 &= -K \left[A (e^{s_1 T} + e^{s_2 T}) + B(1 + e^{s_2 T}) + C(1 + e^{s_1 T}) \right] \\ p_2 &= K \left[A e^{s_1 T} e^{s_2 T} + B e^{s_2 T} + C e^{s_1 T} \right] \\ q_1 &= - (e^{s_1 T} + e^{s_2 T}) \\ q_2 &= e^{s_1 T} e^{s_2 T} \end{aligned}$$

avec

$$s_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad s_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\Delta}}{2}$$

et

$$A = \frac{\tau}{\beta} ; \quad B = \frac{1 + \tau s_1}{s_1(s_1 - s_2)} ; \quad C = \frac{1 + \tau s_2}{s_2(s_2 - s_1)}$$

b) Si $\Delta = \alpha^2 - 4\beta < 0$

$$p_0 = 0$$

$$p_1 = -K \left[2Ae^{aT} \cos bT + B(1 + e^{aT} \cos bT) - \frac{C + Ba}{b} e^{aT} \sin bT \right]$$

$$p_2 = K \left[A e^{2aT} + B e^{aT} \cos bT - \frac{C + Ba}{b} e^{aT} \sin bT \right]$$

$$q_1 = -2e^{aT} \cos bT$$

$$q_2 = e^{2aT}$$

avec $a = -\frac{\alpha}{2} \quad ; \quad b = \frac{\sqrt{\Delta'}}{2} \quad ; \quad \Delta' = -\Delta$

et $A = \frac{1}{\beta} \quad ; \quad B = -\frac{1}{\beta} \quad ; \quad C = \gamma - \frac{\alpha}{\beta}$

c) Si $\Delta = \alpha^2 - 4\beta = 0$

$$p_0 = 0$$

$$p_1 = -K \left[A e^{s_0 T} - B T e^{s_0 T} + C \right]$$

$$p_2 = K \left[A e^{2s_0 T} - B T e^{s_0 T} + C e^{s_0 T} \right]$$

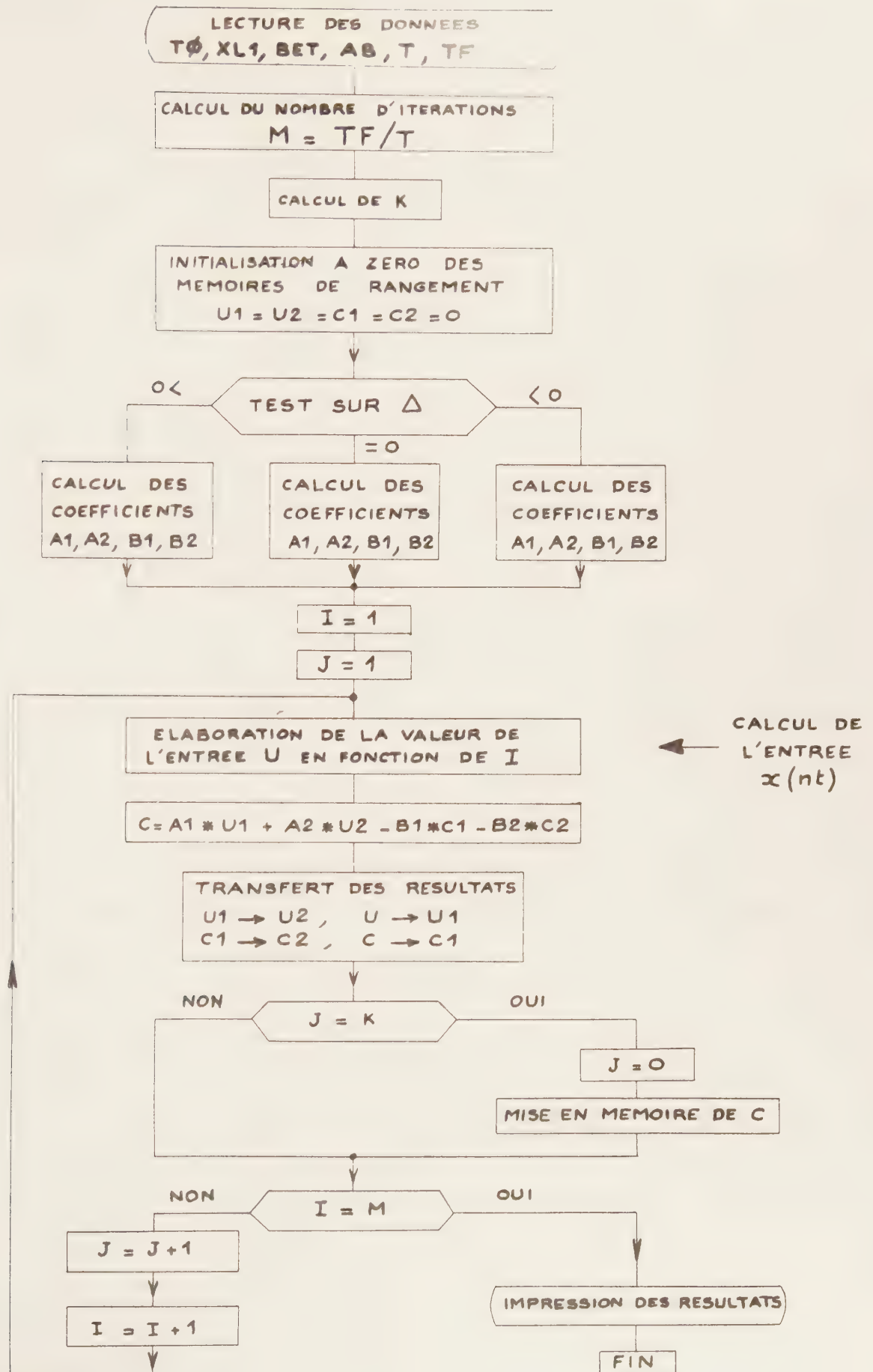
$$q_1 = -2e^{s_0 T}$$

$$q_2 = e^{2s_0 T}$$

avec $s_0 = -\frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{\beta} \quad ; \quad B = -\frac{2}{\alpha} \quad ; \quad C = -\frac{1}{\beta} \quad .$

Le programme de résolution, dont on trouvera le détail en annexe I, correspond à l'organigramme suivant et permet de calculer les réponses à des entrées quelconques, pour toutes les valeurs des paramètres α , β , γ et K . On remarquera en particulier que le passage de l'entrée en échelon à l'entrée en rampe se fait par le changement d'une seule instruction.

ORGANIGRAMME SIMPLIFI



Organigramme.

Le programme écrit en Fortran et exécuté sur IBM 1130 utilise les désignations suivantes :

K	$\longrightarrow$	AB	x_n	$\longrightarrow$	U	y_n	$\longrightarrow$	C
τ	$\longrightarrow$	$T\emptyset$	x_{n-1}	$\longrightarrow$	$U1$	y_{n-1}	$\longrightarrow$	$C1$
α^2	$\longrightarrow$	$XL2$	x_{n-2}	$\longrightarrow$	$U2$	y_{n-2}	$\longrightarrow$	$C2$
α	$\longrightarrow$	$XL1$						
β	$\longrightarrow$	BET						

p_1	$\longrightarrow$	$A1$	q_1	$\longrightarrow$	$B1$
p_2	$\longrightarrow$	$A2$	q_2	$\longrightarrow$	$B2$

Puisque le nombre total M d'itérations, donc de points calculés peut être très grand pour une durée donnée TF de réponse en temps réel ($M = TF/T$), on ne fait imprimer qu'une valeur de la sortie sur K qui dépend de la dimension D du tableau de rangement des résultats ($K = M/D$).

Le programme prévoit en outre un certain nombre de tests, nécessaires dans le cas où l'erreur de chute, due à une période T trop petite pourrait provoquer une divergence.

Valeurs numériques - Résultats.

Les calculs ont été effectués pour cinq groupes de valeurs des paramètres α et β , le coefficient K de la transmittance $H(s)$ étant toujours pris égale à β pour avoir la réponse finale 1 avec l'échelon unité, ^{et} avec $\tau = 0,5$.

α	$\sqrt{10}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{2}$
β	2	1	1	2	2
Δ	> 0	> 0	$= 0$	< 0	< 0

Pour chaque groupe, nous avons procédé avec cinq valeurs différentes de T ,

$$T = 0,1 \quad ; \quad 0,05 \quad ; \quad 0,01 \quad ; \quad 0,005 \quad ; \quad 0,001.$$

toujours faibles vis-à-vis de la période propre du système non amorti qui est $6,28/\sqrt{\beta}$.

Les résultats numériques sont reproduits, pour les différentes valeurs des paramètres, de T et du temps réel t dans les tableaux comparatifs avec la solution analytique. (planches 4 et 7)

Nous nous limitons ici à la valeur de $T = 0,01$ et reproduisons sur les planches 1 et 2, sur lesquelles ne figure qu'un point calculé sur vingt, les réponses à l'échelon et à l'entrée en rampe pour chaque groupe de valeurs des paramètres.

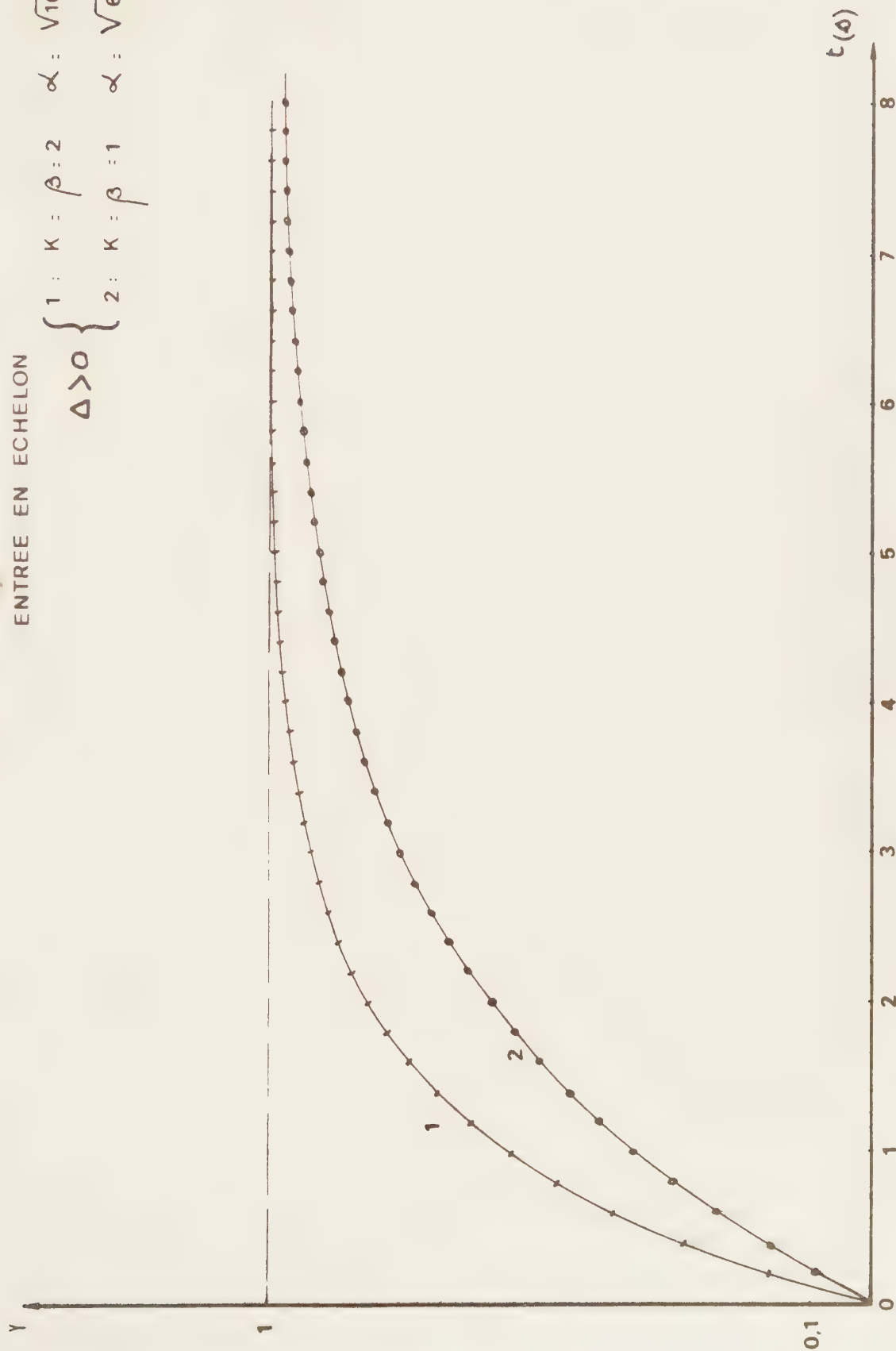
Valeurs numériques des coefficients pour $T = 0,01$.

α	β	Δ	p_1	p_2	q_1	q_2	courbe n°
$\sqrt{10}$	2	> 0	$0,99430.10^{-2}$	$-0,9745726.10^{-2}$	-1,968675	0,9688719	1
$\sqrt{6}$	1	> 0	$0,498901.10^{-2}$	$-0,4890221.10^{-2}$	-1,975703	0,9758025	2
$\sqrt{4}$	1	$= 0$	$0,4999996.10^{-2}$	$-0,4901024.10^{-2}$	-1,980099	0,9801985	3
$\sqrt{4}$	2	< 0	$0,9999969.10^{-2}$	$-0,9801652.10^{-2}$	-1,980000	0,9801985	4
$\sqrt{2}$	2	< 0	$0,1002901.10^{-1}$	$-0,9830283.10^{-2}$	-1,985758	0,9859572	5

SIMULATION DE $H_{(\Delta)} = \frac{K(1 + \sum \Delta)}{\Delta^2 + \alpha\Delta + \beta}$

ENTREE EN ECHELON

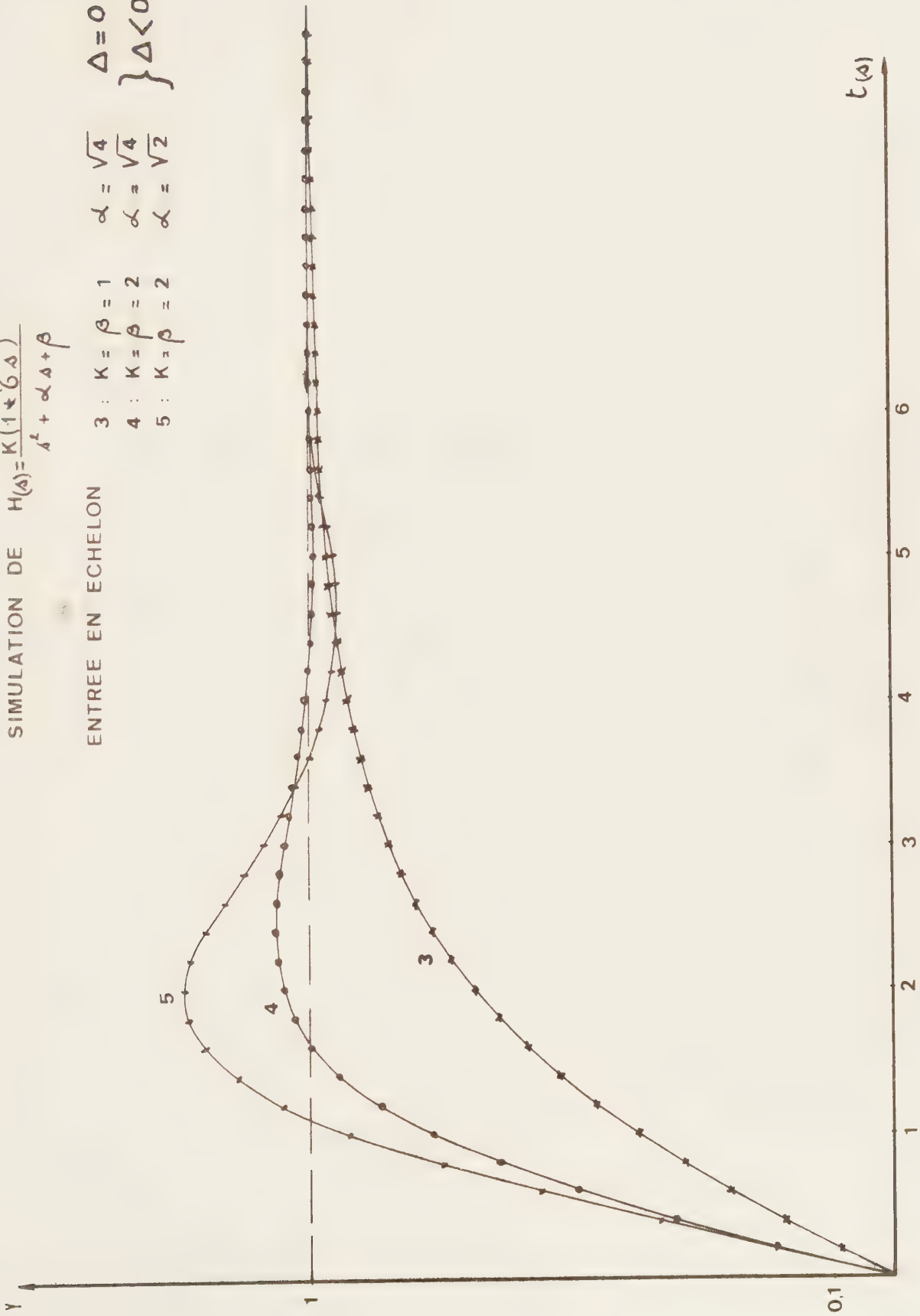
$$\Delta > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 1: K = \beta = 2 \quad \alpha = \sqrt{10} \\ 2: K = \beta = 1 \quad \alpha = \sqrt{6} \end{array} \right.$$



SIMULATION DE $H(\Delta) = \frac{K(1 + \zeta \Delta)}{\Delta^2 + \alpha \Delta + \beta}$

ENTREE EN ECHELON

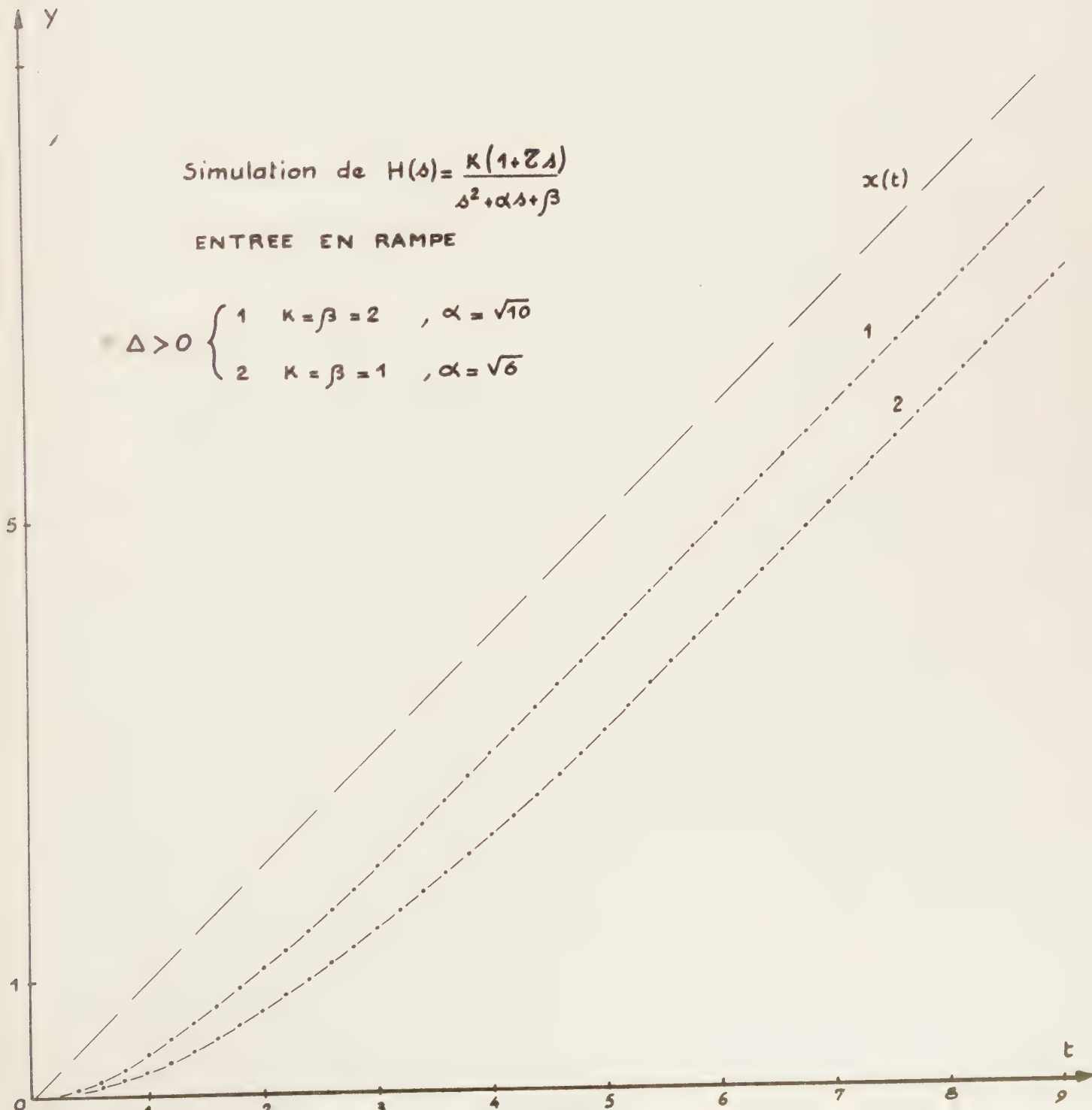
3 : $K = \beta = 1$	$\alpha = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}}$	$\Delta = 0$
4 : $K = \beta = 2$	$\alpha = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}}$	} $\Delta < 0$
5 : $K = \beta = 2$	$\alpha = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}$	

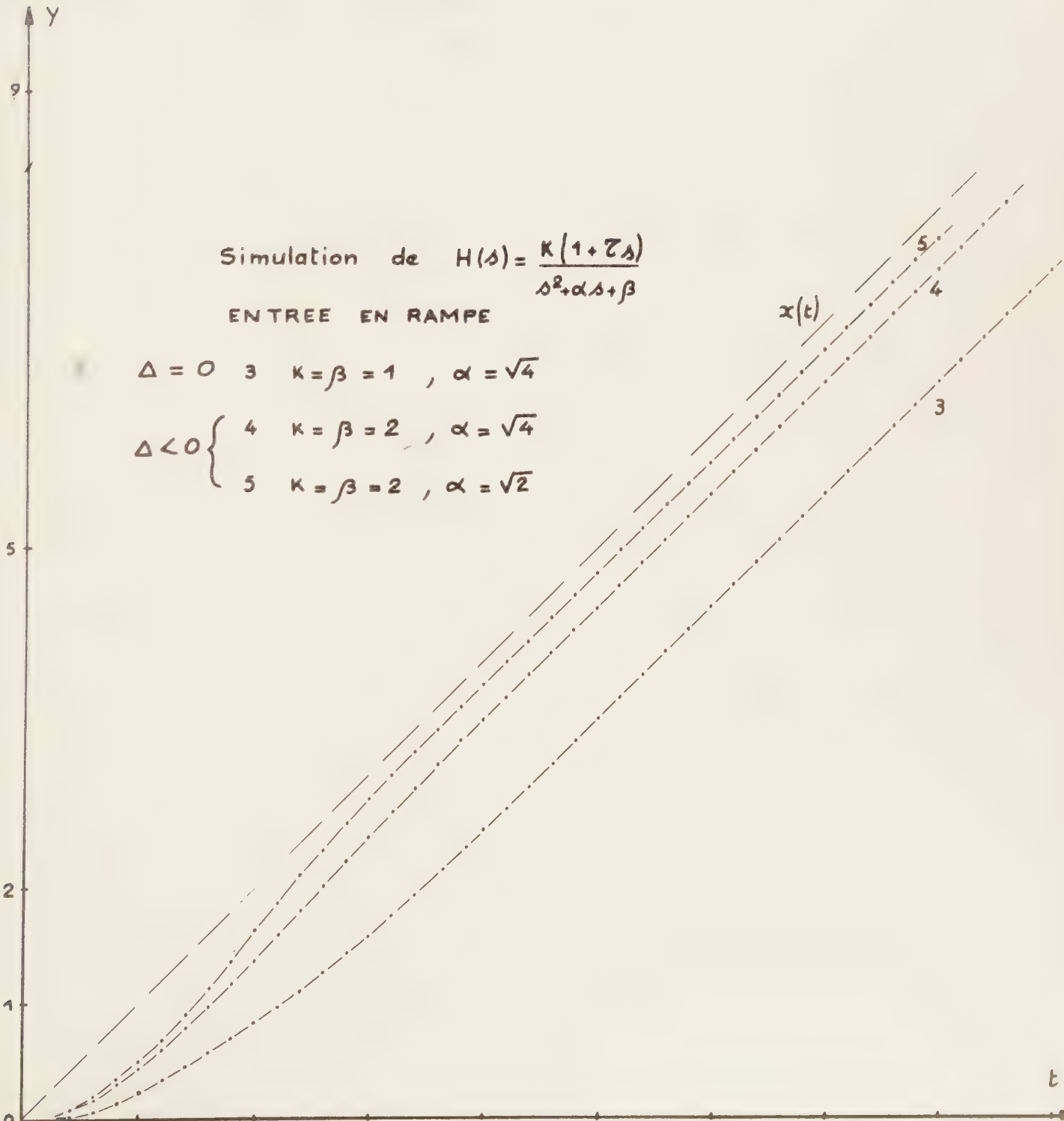


Simulation de $H(s) = \frac{K(1+Ts)}{s^2 + \alpha s + \beta}$

ENTREE EN RAMPE

$$\Delta > 0 \begin{cases} 1 & K = \beta = 2, \alpha = \sqrt{10} \\ 2 & K = \beta = 1, \alpha = \sqrt{6} \end{cases}$$





V. 2. Erreur de chute.

La solution analytique pour l'entrée en échelon et des conditions initiales nulles est donnée par l'originale de

$$Y(s) = \frac{K(1 + \tau s)}{s(s^2 + \alpha s + \beta)}$$

$$a) \Delta = \alpha^2 - 4\beta > 0$$

$$y(t) = K \left[A + B e^{s_1 T} + C e^{s_2 T} \right]$$

avec

$$s_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad s_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$A = \frac{1}{\beta} \quad B = \frac{1 + \tau s_1}{s_1(s_1 - s_2)} \quad C = \frac{1 + \tau s_2}{s_2(s_2 - s_1)}$$

$$b) \Delta = \alpha^2 - 4\beta < 0$$

$$y(t) = K \left[A + B e^{aT} \cos bT + \frac{C + Ba}{b} e^{aT} \sin bT \right]$$

avec

$$a = -\frac{\alpha}{2} \quad b = \frac{\sqrt{\Delta'}}{2} \quad \Delta' = -\Delta$$

$$A = \frac{1}{\beta} \quad B = -\frac{1}{\beta} \quad C = \tau - \frac{\alpha}{\beta}$$

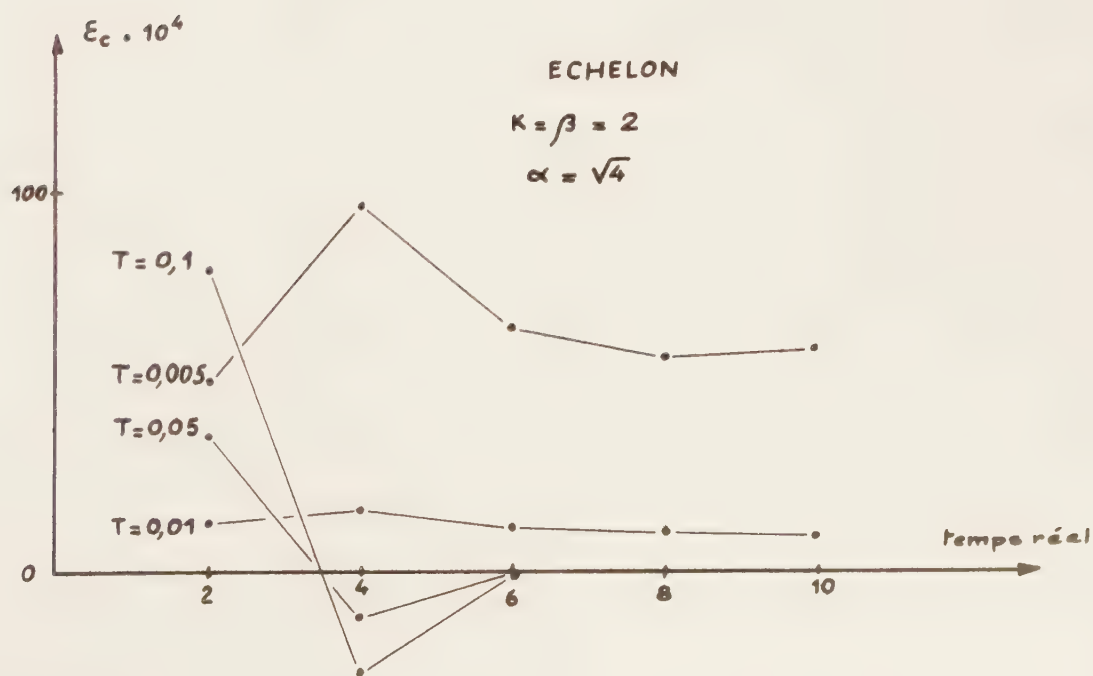
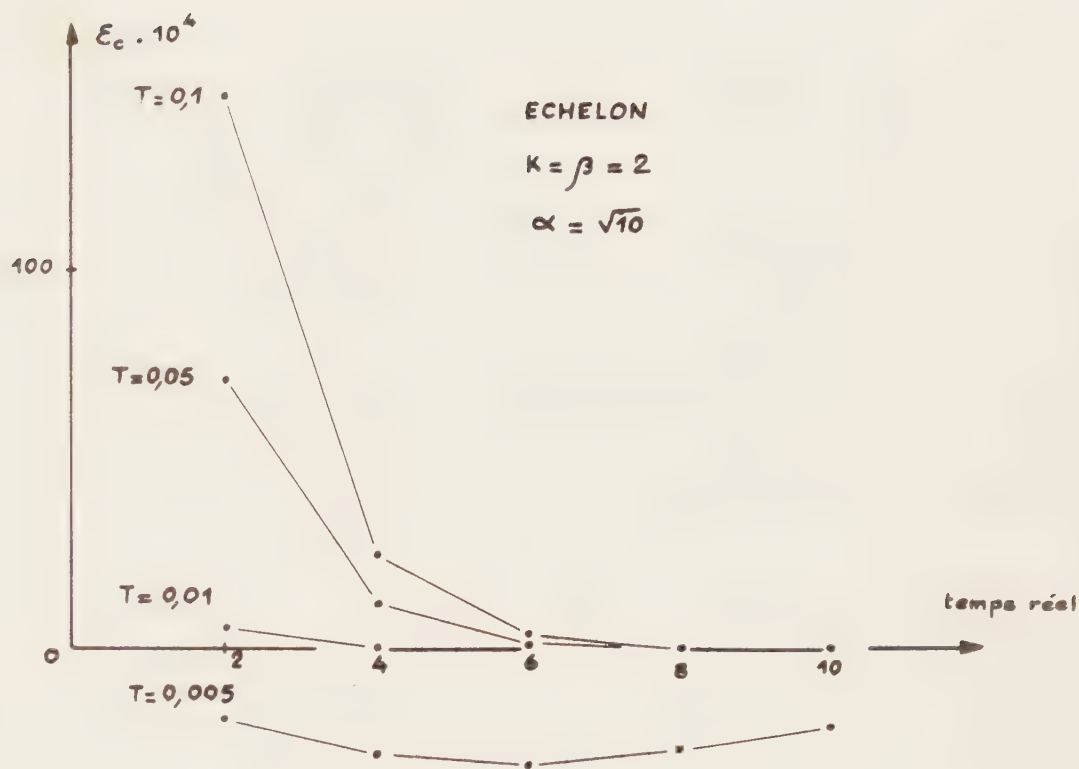
$$c) \Delta = \alpha^2 - 4\beta = 0$$

$$y(t) = K \left[A + e^{s_0 T} (Bt + C) \right]$$

avec

$$s_0 = -\frac{\alpha}{2} \quad A = \frac{1}{\beta} \quad B = -\frac{2}{\alpha} \quad C = -\frac{1}{\beta}$$

ERREUR DE CHUTE EN FONCTION DU TEMPS



Erreur de chute $\mathcal{E}_c = y(t) - y(nT)$

(Entrée en échelon)

$$K = \beta = 2 \quad , \quad \alpha = \sqrt{10} \quad , \quad y(2) = 0,8404810 \quad , \quad y(10) = 0,9998543$$

T		0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
t = 2	y(nT)	0,8257697	0,8333159	0,8399537	0,8424372	0,9105594
	$\mathcal{E}_c$	0,0147113	0,0071651	0,0005273	-0,0019562	-0,0700784
t = 10	y(nT)	0,9998517	0,9998840	1,0005152	1,0020093	1,0016222
	$\mathcal{E}_c$	0,0000026	-0,0000297	-0,0006609	-0,0021550	-0,0017679

$$K = \beta = 1 \quad , \quad \alpha = \sqrt{6} \quad , \quad y(2) = 0,6407043 \quad , \quad y(10) = 0,9942811$$

t = 2	y(nT)	0,6216630	0,6313040	0,6385974	0,6390301	0,6236823
	$\mathcal{E}_c$	0,0190413	0,0094003	0,0021069	0,0016742	0,0170220
t = 10	y(nT)	0,9939665	0,9940978	0,9934252	0,9908633	0,9058094
	$\mathcal{E}_c$	0,0003146	0,0001833	0,0008559	0,0034178	0,0884717

$$K = \beta = 1 \quad , \quad \alpha = \sqrt{4} \quad , \quad y(2) = 0,7293294 \quad , \quad y(10) = 0,9997276$$

t = 2	y(nT)	0,7083327	0,7189767	0,7265646	0,7264547	0,6211138
	$\mathcal{E}_c$	0,0209967	0,0103527	0,0027648	0,0028747	0,1082156
t = 10	y(nT)	0,9996831	0,9996497	0,9982576	0,9954975	0,7530715
	$\mathcal{E}_c$	0,0000445	0,0000779	0,0014700	0,0042301	0,2466561

$$K = \beta = 2, \quad \alpha = \sqrt{4}, \quad y(2) = 1,0563194, \quad y(10) = 1,0000381$$

	T	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
t = 2	y(nT)	1,0483460	1,0526397	1,0550758	1,0519690	1,0028135
	ξ_c	0,0079734	0,0036797	0,0012436	0,0043504	0,0535059
t = 10	y(nT)	1,0000302	0,9999697	0,9990730	0,9940623	0,9179575
	ξ_c	0,0000079	0,0000684	0,0009651	0,0059758	0,0820808

$$K = \beta = 2, \quad \alpha = \sqrt{2}, \quad y(2) = 1,2242798, \quad y(10) = 0,9991298$$

t = 2	y(nT)	1,2244164	1,2248668	1,2227778	1,2170534	1,1971490
	ξ_c	-0,0001366	-0,0005870	0,0015020	0,0072264	0,0271308
t = 10	y(nT)	0,9990648	0,9990532	0,9976913	0,9929369	0,9267741
	ξ_c	0,0000650	0,0000766	0,0014385	0,0061929	0,0723557

Remarque :

Les valeurs des coefficients A , B , C , dans les trois cas précédents sont les mêmes que celles calculées lors de la décomposition pour le calcul des coefficients de la récurrence, ce qui est évident, puisque par échantillonnage et blocage, la fonction d'entrée $x(t)$ est approchée par une suite d'échelons.

Résultats :

Les valeurs de la solution analytique $y(t)$, également calculée sur I. B. M. 1130 (sept chiffres significatifs en simple précision) pour des valeurs entières du temps $t = 1, 2, 3, \dots, 20$ sont partiellement comparées pour $t = 2$ et 10 , dans les tableaux des planches 4 aux valeurs $y(nT)$ obtenues par récurrence. L'écart $[y(t) - y(nT)]$ est noté ξ_c .

On constate, comme le montrent les graphiques de la planche 3, relatifs à quelques cas typiques, que, contrairement à ce que l'on aurait pu prévoir, l'erreur de chute est d'autant plus grande que T est grand pour les faibles valeurs du temps réel t et s'annule pratiquement lorsque t augmente. Par contre, pour les faibles valeurs de T , l'erreur reste constante, indépendamment donc du nombre d'itérations.

Pour un même temps réel, l'erreur de chute minimale est obtenue pour $T = 0,01$, pratiquement dans tous les cas.

V.3. Erreur totale.

L'entrée en rampe, $x = t$, qui donne une erreur systématique toujours de même sens, est utilisée pour montrer comment évolue l'erreur totale en fonction du temps réel t et de la période d'échantillonnage T .

Avec les conditions initiales nulles, la solution analytique est donnée par l'originale de

$$Y(s) = \frac{K(1 + \zeta s)}{s^2(s^2 + \alpha s + \beta)}$$

$$a) \Delta = \alpha^2 - 4\beta > 0$$

$$y(t) = K [A + D.t + B e^{s_1 t} + C e^{s_2 t}]$$

avec $s_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\Delta}}{2}$, $s_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\Delta}}{2}$

$$D = \frac{1}{\beta} \quad , \quad A = \frac{\zeta - \alpha/\beta}{\beta} \quad , \quad C = \frac{A.s_1 - D}{s_2 - s_1} \quad , \quad B = -(C+A)$$

$$b) \Delta = \alpha^2 - 4\beta < 0$$

$$y(t) = K [A + Dt + B e^{at} \cos bt + \frac{C + Ba}{b} e^{at} \sin bt]$$

avec $a = -\frac{\alpha}{2}$, $b = \frac{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2}$

$$D = \frac{1}{a^2 + b^2} \quad , \quad A = \frac{\zeta + 2aD}{a^2 + b^2} \quad , \quad B = -A \quad , \quad C = 2aA - D$$

$$c) \Delta = \alpha^2 - 4\beta = 0$$

$$y(t) = K [A + Dt + e^{s_0 t} (Bt + C)]$$

avec $s_0 = -\frac{\alpha}{2}$

$$D = -\frac{1}{s_0} \quad , \quad A = \frac{\zeta + 2/s_0}{s_0} = -C \quad , \quad B = s_0(C + 2A) - D$$

Remarque :

Les coefficients A, B, C, D ne sont pas explicités en fonction des données α , β , ζ , comme il serait logique de le faire pour une

expression littérale, mais inutile pour le calcul numérique.

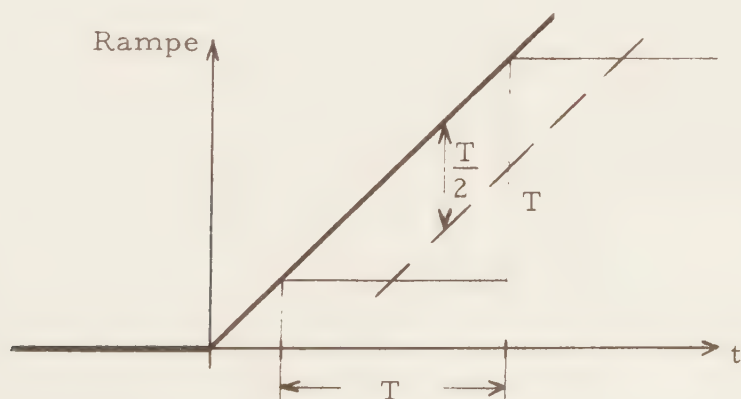
Résultats.

Le programme complet de calculs des valeurs correspondant à la solution analytique est donné en annexe II et les planches 7 rassemblent les valeurs numériques des résultats obtenus analytiquement et par récurrence.

Les graphiques des planches 5 représentent l'erreur totale ε_t , $[\varepsilon_t = y(t) - y(nT)]$, en fonction de T , portée en échelle logarithmique, pour différentes valeurs du temps réel t .

On constate que l'erreur totale, positive ou négative, est la plus voisine de zéro pour $T = 0,005$ ou $T = 0,01$. Mais l'évolution de cette erreur en fonction du nombre d'itérations (Planche 6) montre l'effet cumulatif de l'erreur de chute pour les faibles valeurs de T ($T = 0,005$), ce qui impose le choix de $T = 0,01$ pour réaliser un bon compromis entre l'erreur de chute et l'erreur systématique.

On met ainsi en évidence le retard pur de $T/2$ introduit par le bloqueur d'ordre zéro. En effet, la pente de la rampe est égale à un et on constate que l'erreur totale tend vers la valeur $T/2$.



Nous avons également comparé l'erreur totale relative

$$\xi_{tr} = \left[\frac{y(t) - y(nT)}{y(t)} \right] \quad \text{à l'erreur de chute relative}$$

Rampe

$$\xi_{cr} = \left[\frac{y(t) - y(nT)}{y(t)} \right] \quad \text{dans les tableaux de l'annexe III , ce qui}$$

Echelon

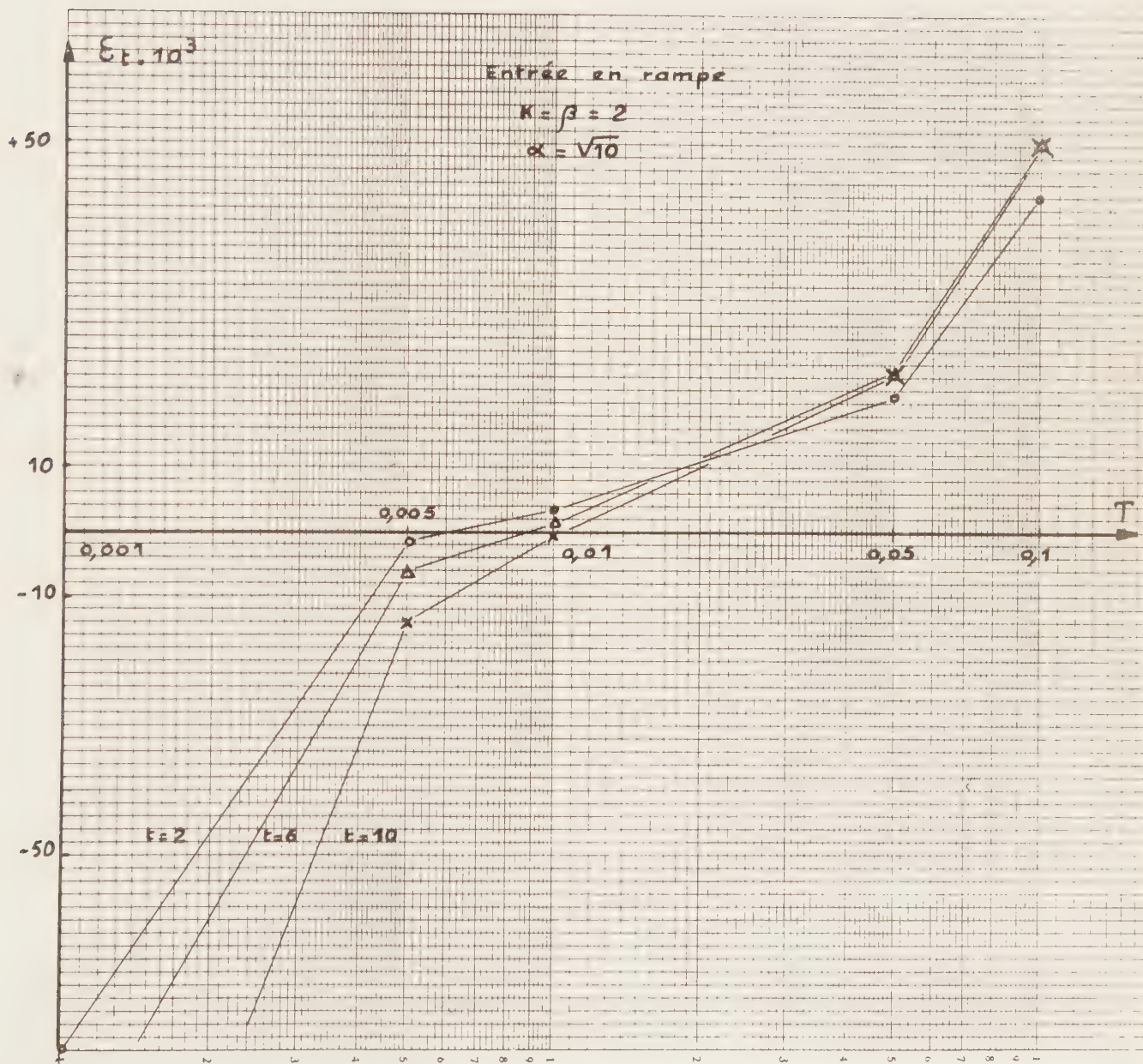
donne une idée de l'erreur systématique relative, de l'ordre de quelques millièmes pour les valeurs utilisables de la période d'échantillonnage

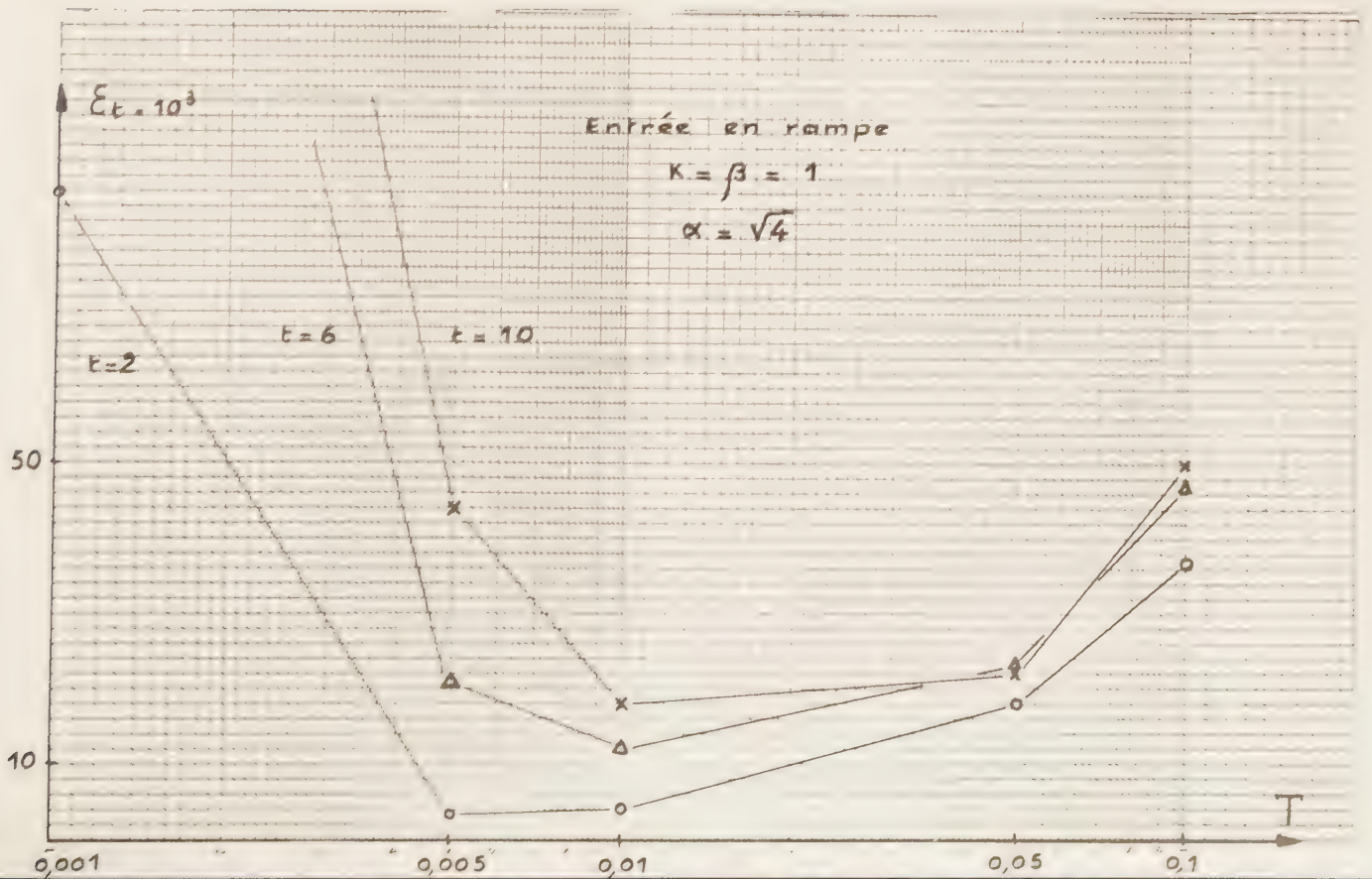
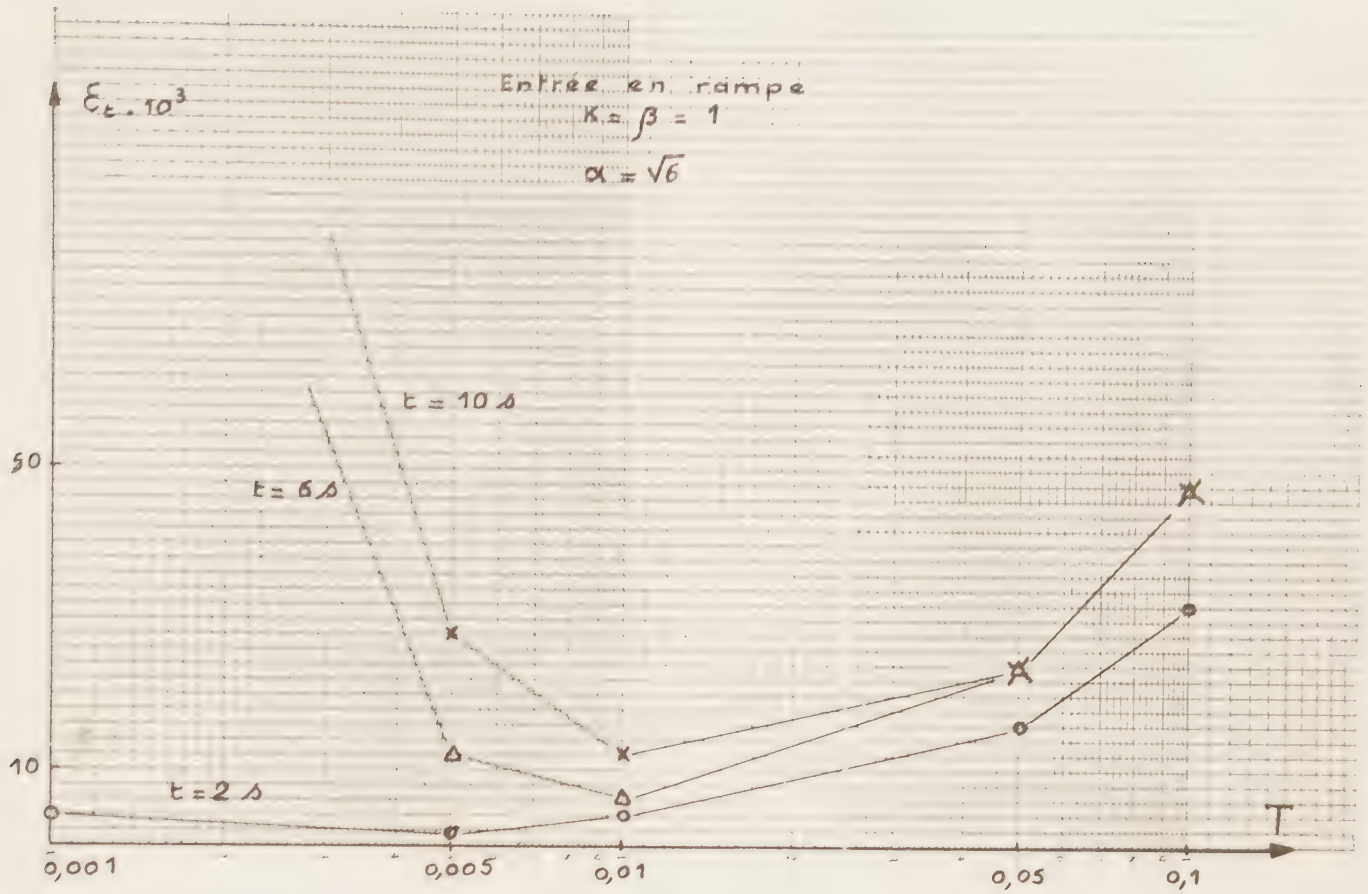
$T = 0,01$ ou $0,005$.

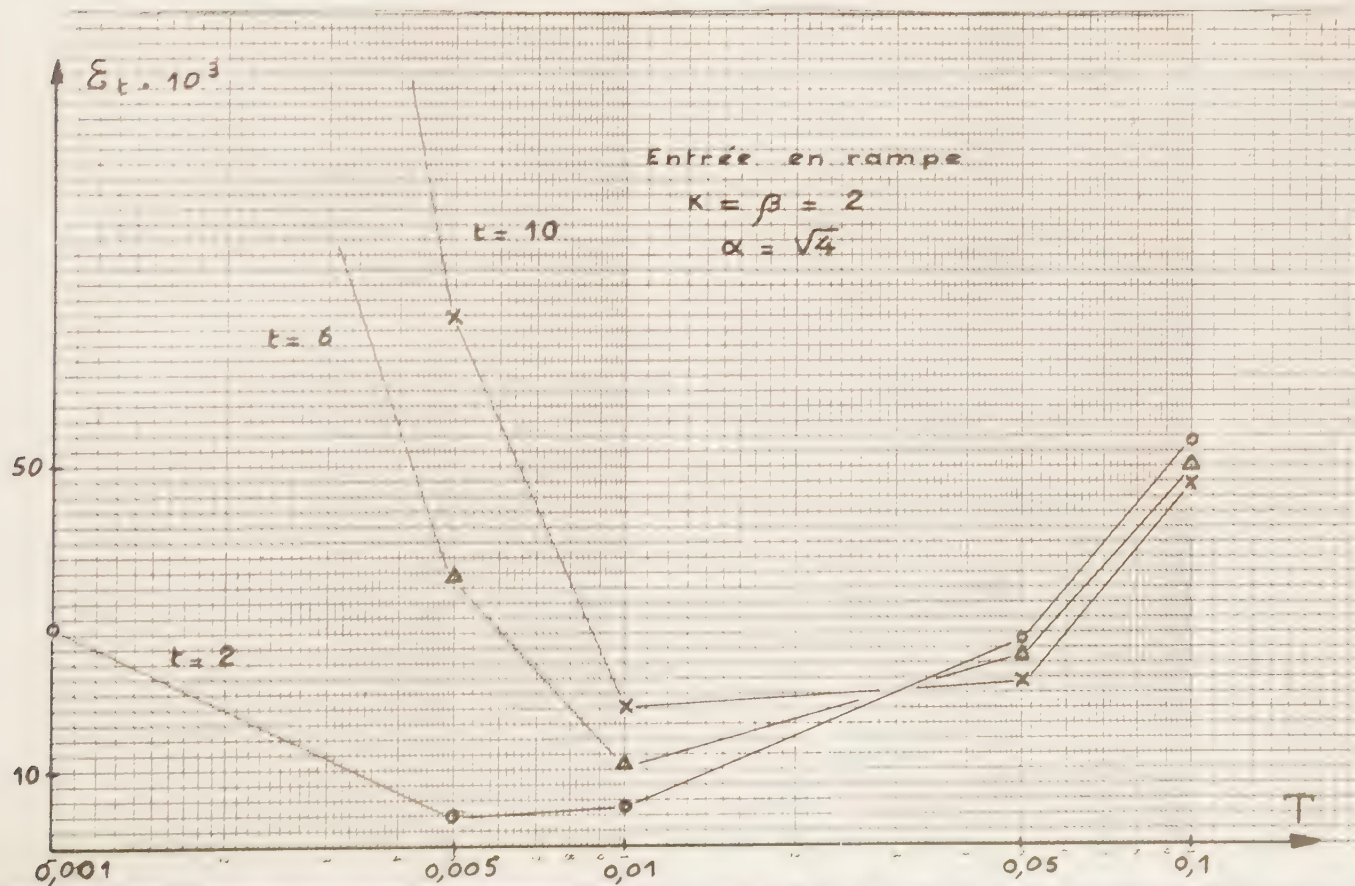
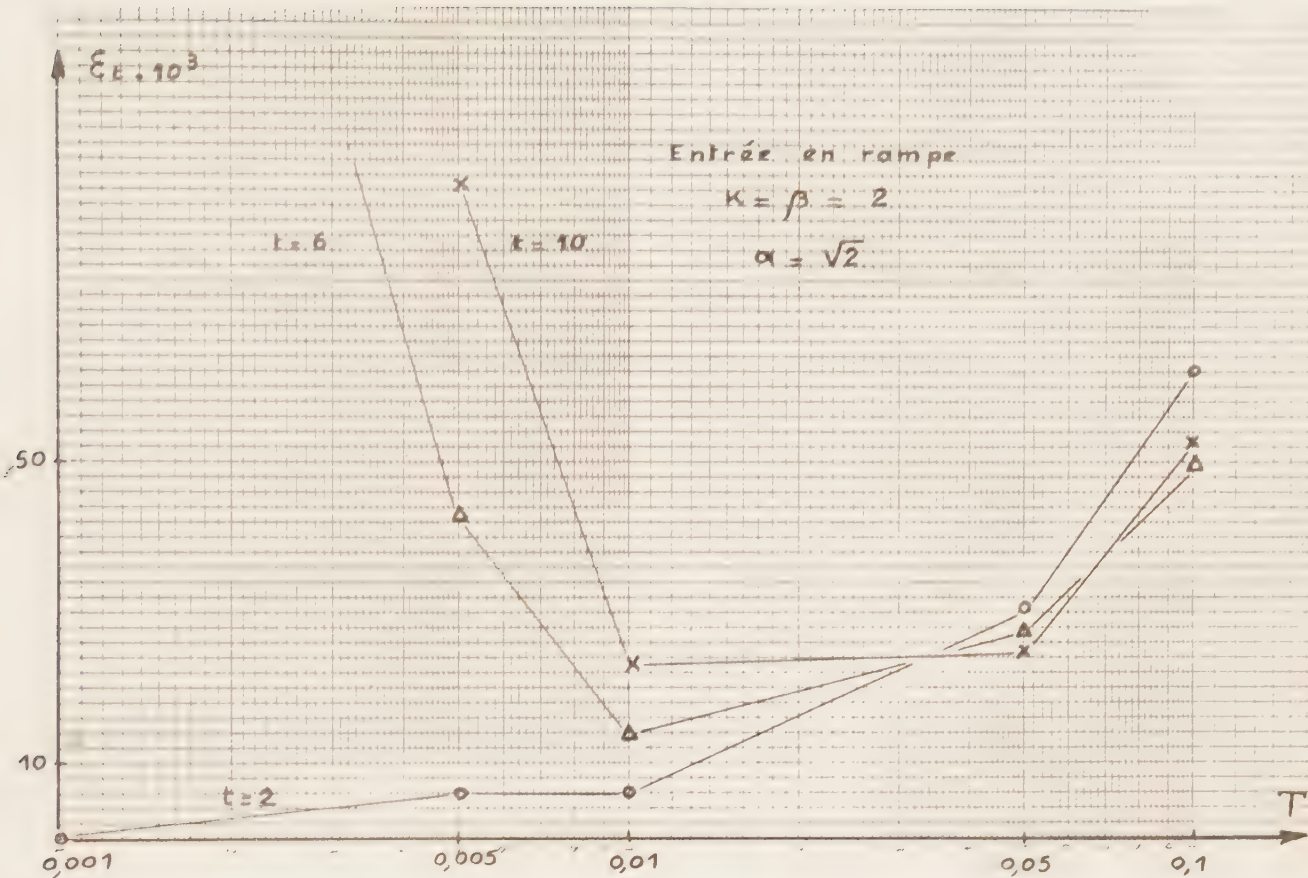
Avec des périodes propres d'au moins quelques secondes et pour un calculateur à 7 chiffres significatifs, nous choisirons $T = \frac{1}{100}$, en particulier pour les applications présentées dans les chapitres suivants.

* *

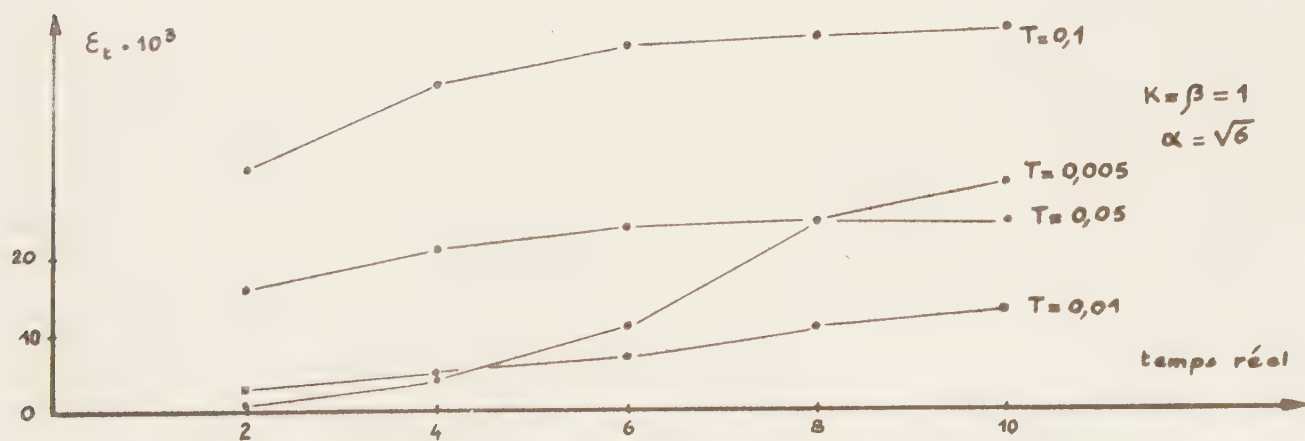
Erreur totale en fonction de T
pour différents t



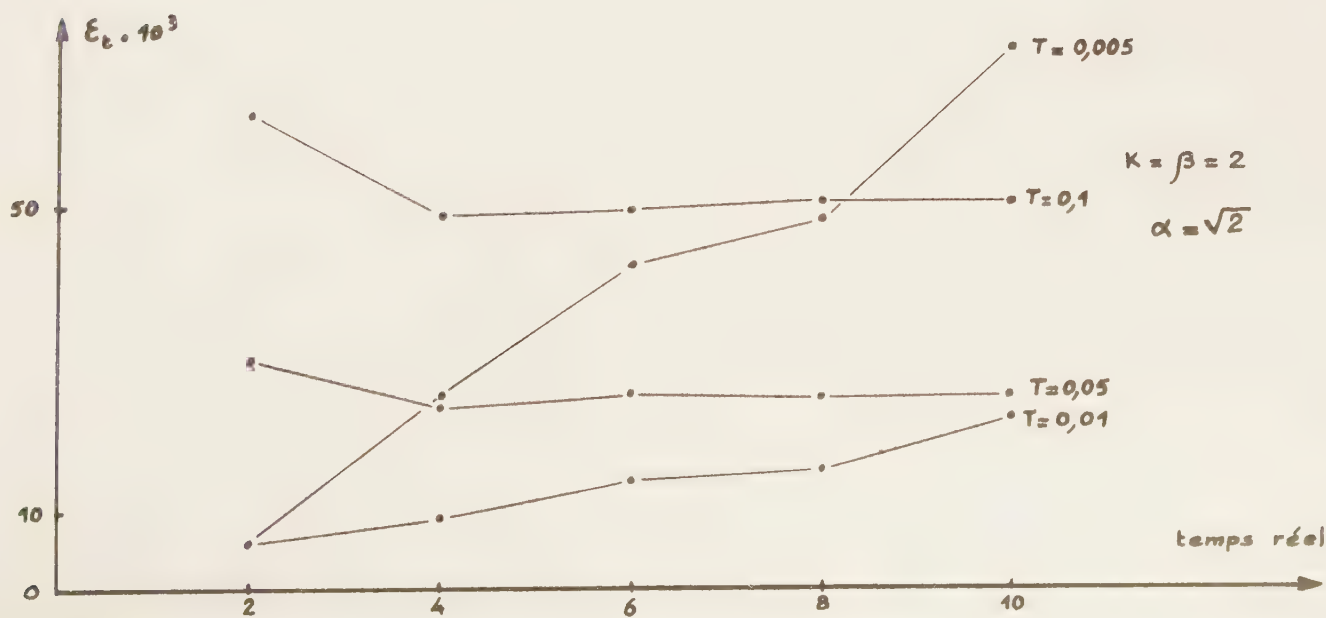
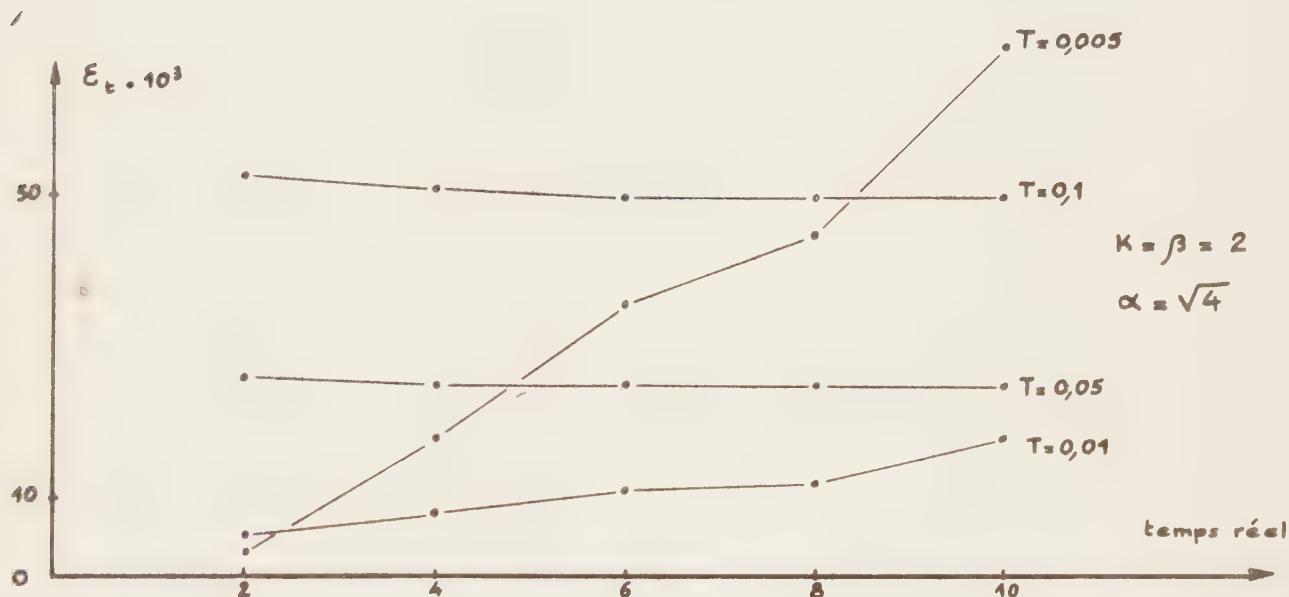
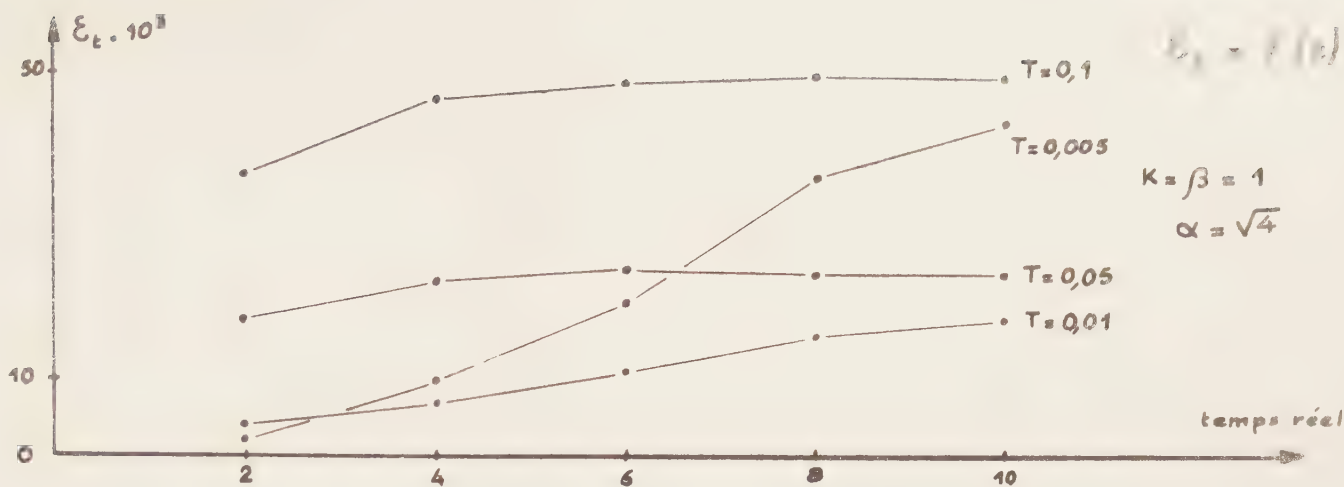




ERREUR TOTALE EN FONCTION DU
TEMPS POUR DIFFERENTES VALEURS
DE T $\epsilon_t = f(t)$



$$\varepsilon_t = f(t)$$



$$\text{Erreur totale } \mathcal{E}_t = y(t) - y(nT)$$

(Entrée en rampe)

$$K = \beta = 2, \quad \alpha = \sqrt{10}, \quad y(2) = 1,1007225, \quad y(10) = 8,9190292$$

	T	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
t = 2	y(nT)	1,0579955	1,0795700	1,0975754	1,1018962	1,1875729
	$\mathcal{E}_t$	0,0427270	0,0211525	0,0031471	-0,0011737	-0,0868504
t = 10	y(nT)	8,8682823	8,8940792	8,9195728	8,9339866	9,2276249
	$\mathcal{E}_t$	0,0507469	0,0249500	-0,0005436	-0,0149574	-0,3085957

$$K = \beta = 1, \quad \alpha = \sqrt{6}, \quad y(2) = 0,7449865, \quad y(10) = 8,0615596$$

t = 2	y(nT)	0,7126955	0,7289098	0,7416431	0,7431808	0,7408537
	$\mathcal{E}_t$	0,0322910	0,0160767	0,0033434	0,0018057	0,0041328
t = 10	y(nT)	8,0113754	8,0363769	8,0490434	8,0332660	7,3869428
	$\mathcal{E}_t$	0,0501842	0,0251827	0,0125102	0,0282936	0,6746168

$$K = \beta = 1, \quad \alpha = \sqrt{4}, \quad y(2) = 0,8383382, \quad y(10) = 8,5002956$$

t = 2	y(nT)	0,8011667	0,8194061	0,8342062	0,8353120	0,7519749
	$\mathcal{E}_t$	0,0371715	0,0189321	0,0041320	0,0030262	0,0863633
t = 10	y(nT)	8,4497051	8,4754571	8,4817676	8,4557018	6,5776500
	$\mathcal{E}_t$	0,0505905	0,0248385	0,0185280	0,0445938	1,9226456

$$K = \beta = 2 \quad , \quad \alpha = \sqrt{4} \quad , \quad y(2) = 1,4103105 \quad , \quad y(10) = 9,4999943$$

	T	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
t = 2	y(nT)	1,3567118	1,3836908	1,4049687	1,4055621	1,3805151
	ξ_t	0,0535987	0,0266197	0,0053418	0,0047484	0,0297954
t = 10	y(nT)	9,4490280	9,4741440	9,4816665	9,4293232	8,6023769
	ξ_t	0,0509662	0,0258503	0,0183278	0,0706711	0,8976174

$$K = \beta = 2 \quad , \quad \alpha = \sqrt{2} \quad , \quad y(2) = 1,6460025 \quad , \quad y(10) = 9,7932472$$

t = 2	y(nT)	1,5839254	1,6151592	1,6390774	1,6390836	1,6450769
	ξ_t	0,0620771	0,0308433	0,0069231	0,0069189	0,0009256
t = 10	y(nT)	9,7422390	9,7674045	9,7695789	9,7059688	8,7444324
	ξ_t	0,0510082	0,0258427	0,0236683	0,0872784	1,0488148

CHAPITRE VI - SIMULATION D'UN SYSTEME DU QUATRIEME ORDRE.

a) Système étudié.

Le système choisi est celui d'une installation du deuxième ordre avec intégration

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + \lambda s + 1)} \quad (\text{VI.1})$$

muni d'un correcteur physiquement réalisable

$$C(s) = \frac{a\beta(1 + \zeta s)}{1 + \alpha s} \quad (\text{VI.2})$$

et comportant une boucle unitaire (fig. VI.1), dont M. Aubrun et C. Humbert [16] [17] ont étudié le comportement indiciel en dépassement et temps de réponse.

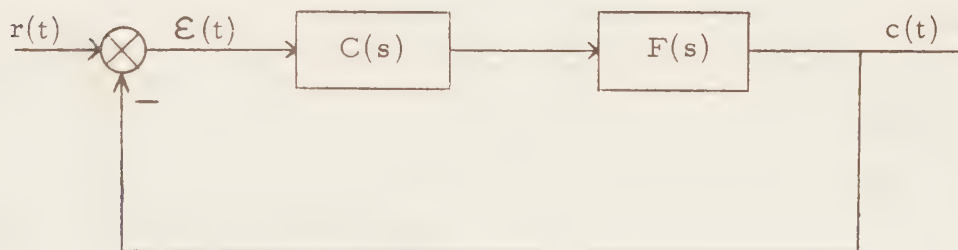


Figure VI.1.

La simulation numérique de cette installation a été faite selon le modèle échantillonné de la figure VI.2.

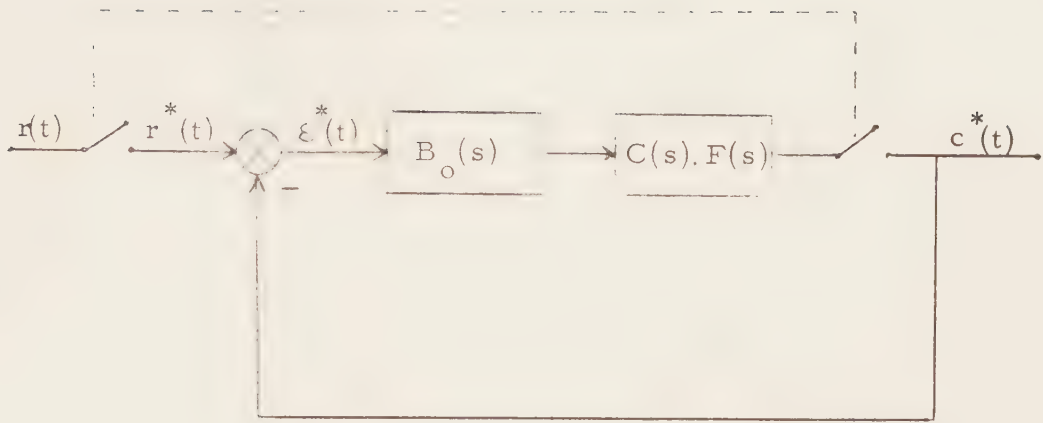


Figure VI. 2.

ce qui conduit à

$$\xi_{n-1} = r_{n-1} - c_{n-1}$$

$$c_n = a_1 \xi_{n-1} + a_2 \xi_{n-2} + a_3 \xi_{n-3} + a_4 \xi_{n-4} - b_1 c_{n-1} - b_2 c_{n-2} - b_3 c_{n-3} - b_4 c_{n-4} \quad (\text{VI. 3})$$

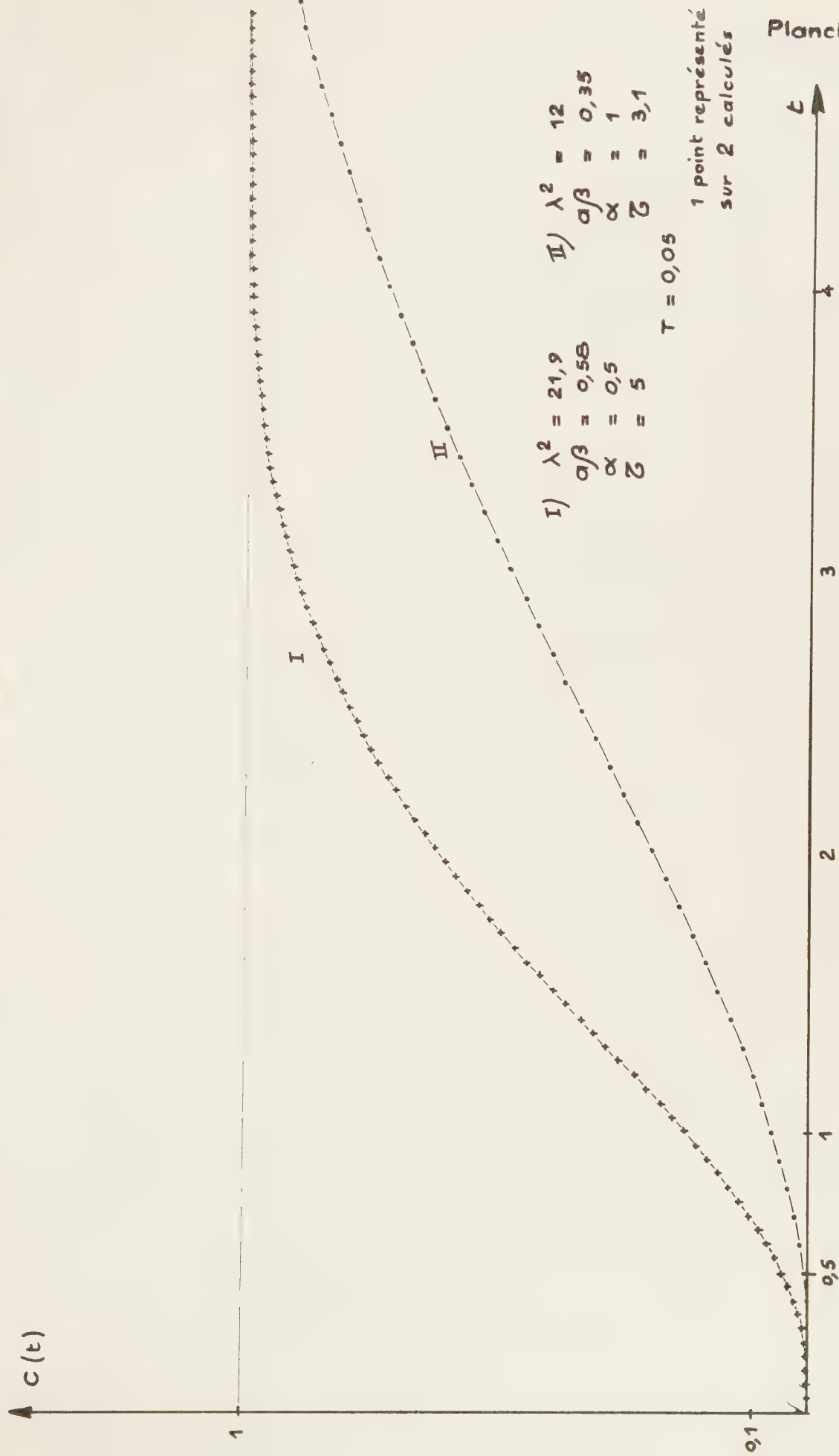
avec les valeurs des coefficients a_j et b_j calculées en annexe IV.

Cette annexe contient également le programme complet de simulation, qui permet de repérer aussi la plus grande valeur de la sortie C_M , ainsi que l'instant où elle apparaît t_M , donnant ainsi directement le temps de réponse et le taux de dépassement pour n'importe quelles valeurs des paramètres $a\beta$, τ , α et λ .

b) Valeurs numériques. Résultats.

Les essais ont été faite avec les valeurs numériques utilisées en simulation analogique par C. Humbert et M. Aubrun, le système étant initialement au repos, soit :

REPONSE D'UN SYSTÈME DU 4^{ème} ORDRE A UNE ENTRÉE EN ECHELON



I) $\lambda^2 = 21,9$
 $\alpha\beta = 0,58$
 $\alpha = 0,5$
 $\zeta = 5$

II) $\lambda^2 = 12$
 $\alpha\beta = 0,35$
 $\alpha = 1$
 $\zeta = 3,1$

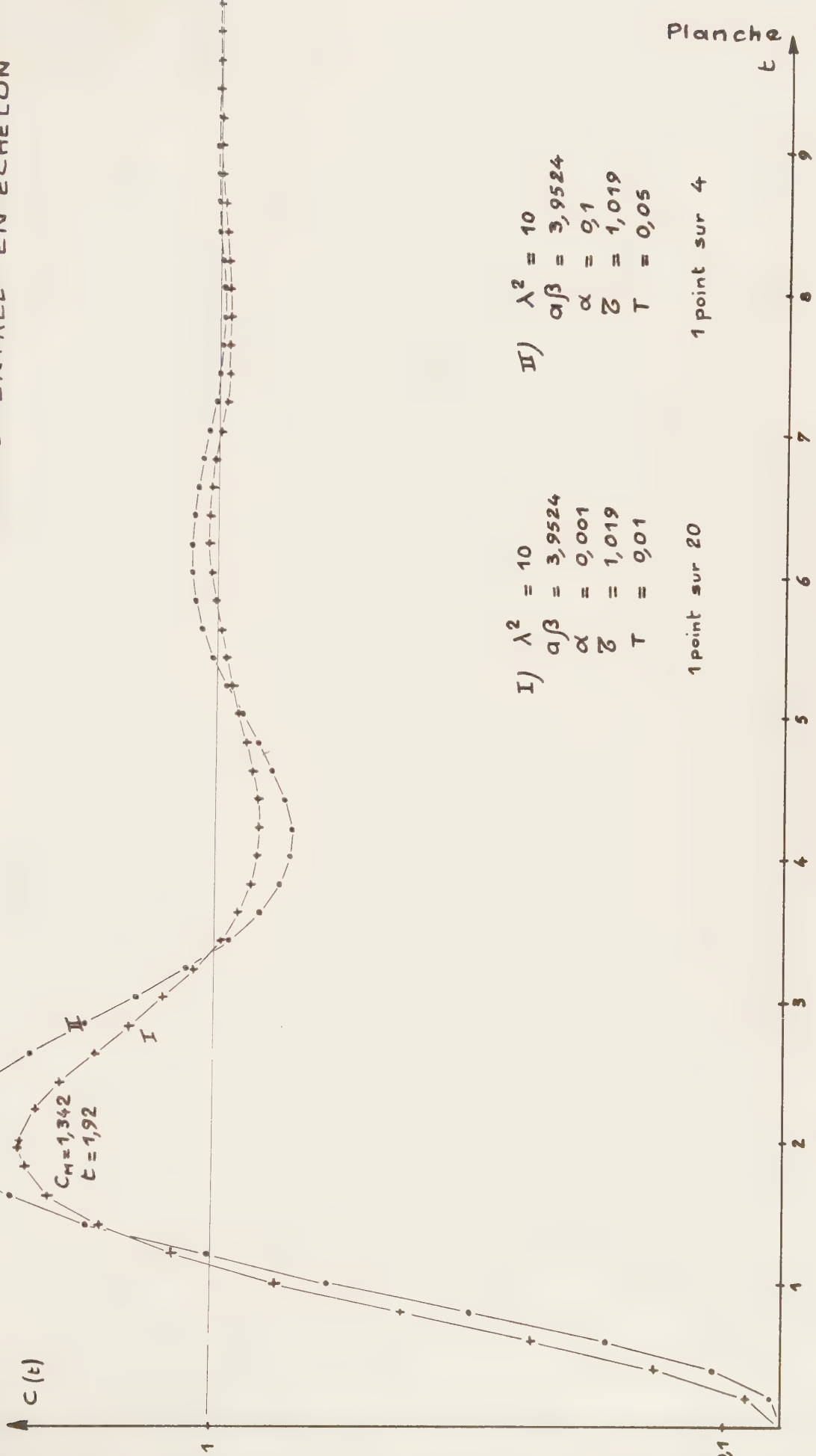
$T = 0,05$

1 point représenté
sur 2 calculés

Planche B, 1

REPONSE D'UN SYSTÈME DU 4^È ORDRE A UNE ENTREE EN ECHELON

$C_M = 1,46104$
 $t = 2,0$



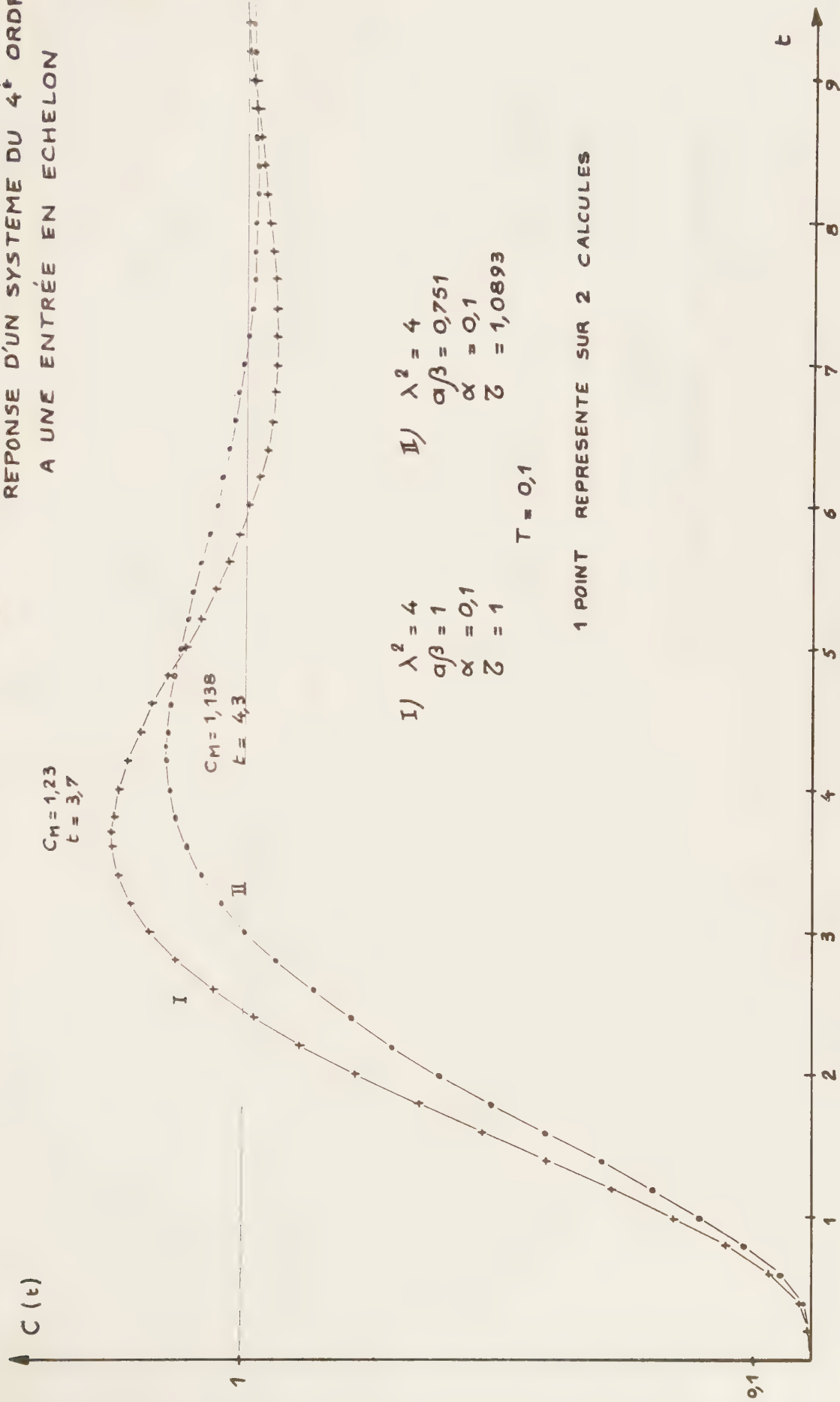
I) $\lambda^2 = 10$
 $a\beta = 3,9524$
 $\alpha = 0,001$
 $\xi = 1,019$
 $T = 0,01$

1 point sur 20

II) $\lambda^2 = 10$
 $a\beta = 3,9524$
 $\alpha = 0,1$
 $\xi = 1,019$
 $T = 0,05$

1 point sur 4

REPOSE D'UN SYSTEME DU 4^e ORDRE
A UNE ENTRÉE EN ECHELON



$c(t)$

$C_M = 1,54641$
 $t = 5,65$

$C_M = 1,1515$
 $t = 4,7$

REPONSE D'UN SYSTEME
DU 4^e ORDRE A UNE
ENTREE EN ECHELON

I

II

I)

$\lambda^2 = 3$
 $\alpha\beta = 0,6494$
 $\alpha = 0,1$
 $\beta = 0,7697$

II)

$\lambda^2 = 3$
 $\alpha\beta = 0,4787$
 $\alpha = 0,74$
 $\beta = 0,7453$

$T = 0,05$

1 POINT REPRESENTE SUR 2 CALCULES



λ^2	$a \beta$	ζ	α	T	C_M	t_M secondes	Courbe
21,9	0,58	5	0,5	0,05	régime apériodique		1 Planche 8.1
12	0,35	3,1	1	0,05	" "		2 Planche 8.1
10	3,9524	1,019	0,001	0,01	1,342	1,92	1 Planche 8.2
10	3,9524	1,019	0,1	0,05	1,461	2,0	2 Planche 8.2
4	1	1	0,1	0,1	1,23	3,7	1 Planche 8.3
4	0,751	1,0893	0,1	0,1	1,138	4,3	2 Planche 8.3
3	0,6494	0,7697	0,1	0,05	1,1515	4,7	1 Planche 8.4
3	0,4877	0,7453	0,74	0,05	1,5464	5,65	2 Planche 8.4

Les résultats représentés sur les graphiques des planches 8 sont en parfait accord avec ceux de la simulation analogique et la précision obtenue, indispensable à la récurrence numérique, dépasse les besoins de l'analyse pratique du système.

* *

CHAPITRE VII - EXTENSION AUX SYSTEMES NON LINEAIRES.

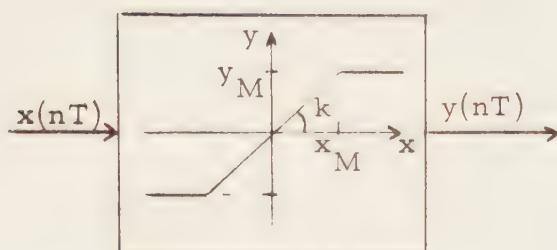
EXEMPLES.

La méthode proposée, transposition numérique de la simulation analogique, permet de tenir facilement compte des non-linéarités localisées, telles que saturation, hystérésis, amplification non linéaire, transmission avec seuil, etc..., comme on va le voir sur les quelques exemples suivants.

VII.1. Réponses de quelques éléments non linéaires.

- Saturation.

La caractéristique saturable de la figure VII.1. obéit à



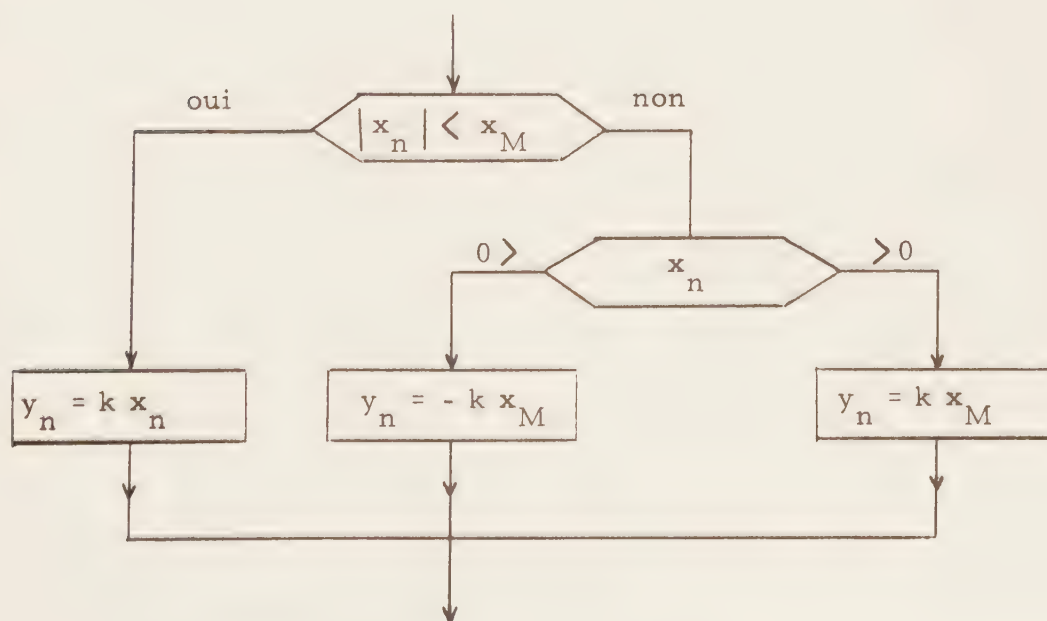
$$y(nT) = kx(nT) \text{ pour } |x(nT)| < x_M$$

$$y(nT) = kx_M \text{ pour } x(nT) > x_M$$

$$y(nT) = -kx_M \text{ pour } x(nT) < -x_M$$

Figure VII.1.

ce qui donne l'organigramme :



- Transmission avec seuil et hystérésis (cas de certains relais électriques).

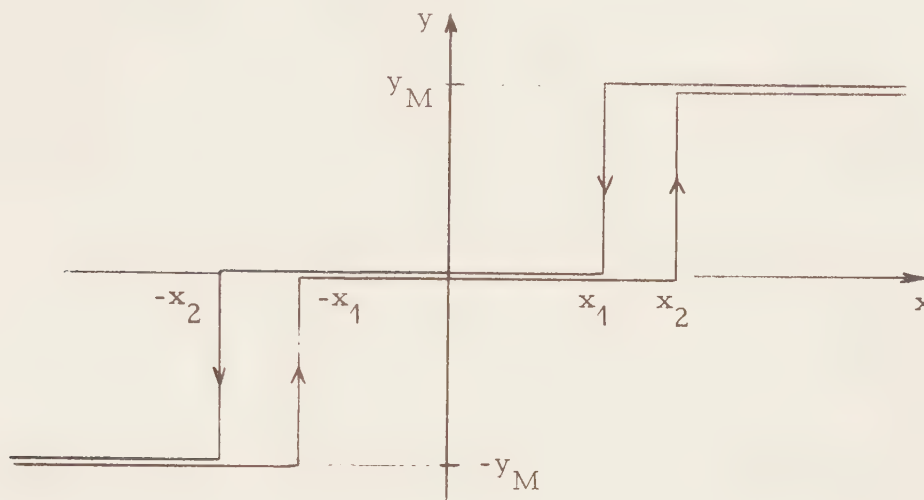


Figure VII. 2.

La caractéristique de la figure VII. 2 se traduit par

$$y_n = 0 \quad \text{si} \quad |x_n| \leq x_1$$

$$y_n = y_M (\text{signe } x_n) \quad \text{si} \quad |x_n| \geq x_2$$

$$y_n = 0 \quad \text{si} \quad x_1 < |x_n| < x_2$$

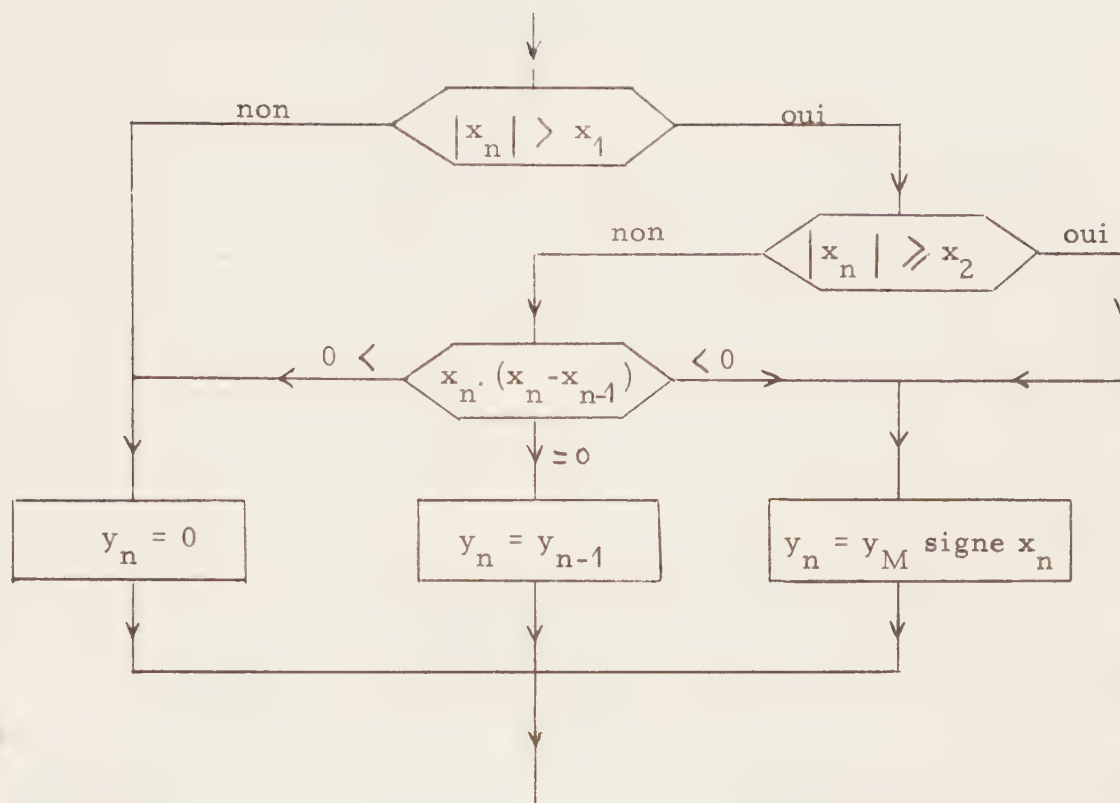
$$\text{et} \quad x_n \cdot (x_n - x_{n-1}) > 0$$

$$y_n = y_M (\text{signe } x_n) \quad \text{si} \quad x_1 < |x_n| < x_2$$

$$\text{et} \quad x_n \cdot (x_n - x_{n-1}) < 0$$

$$y_n = y_{n-1} \quad \text{si} \quad x_n = x_{n-1}$$

donc par l'organigramme :



VII.2. Etude d'un circuit R. L. C. à inductance fortement non linéaire.

Les valeurs numériques de cet exemple sont tirées du travail de M. Lamotte [18] sur l'étude de l'amorçage des sous-harmoniques dans un circuit R. L. C. à inductance fortement non linéaire.

Soit à résoudre

$$\frac{d\Phi}{dt} + R i + \frac{1}{C} \int i dt = A \sin(\omega t_f + \omega t) \quad (\text{VII.1})$$

avec la caractéristique de flux de la figure VII. 3.

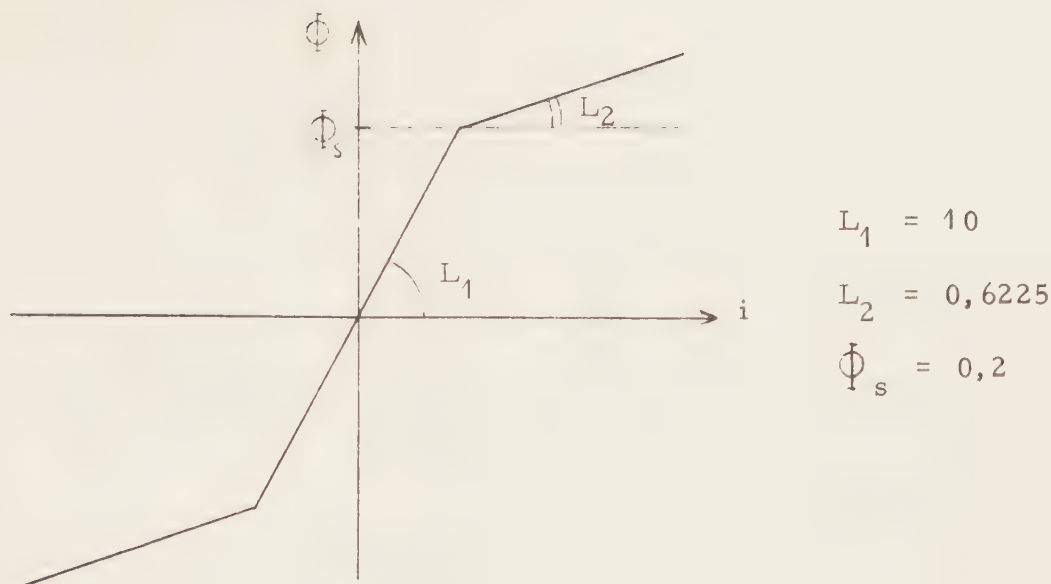


Figure VII. 3.

Le schéma analogique se déduit immédiatement de

$$\frac{d\Phi}{dt} = A \sin(\omega t_f + \omega t) - R i - \frac{1}{C} \int i dt \quad (\text{VII. 2})$$

représenté par la figure VII. 4, où sont en évidence les conditions initiales Φ_0 et V_0 (tension aux bornes du condensateur).

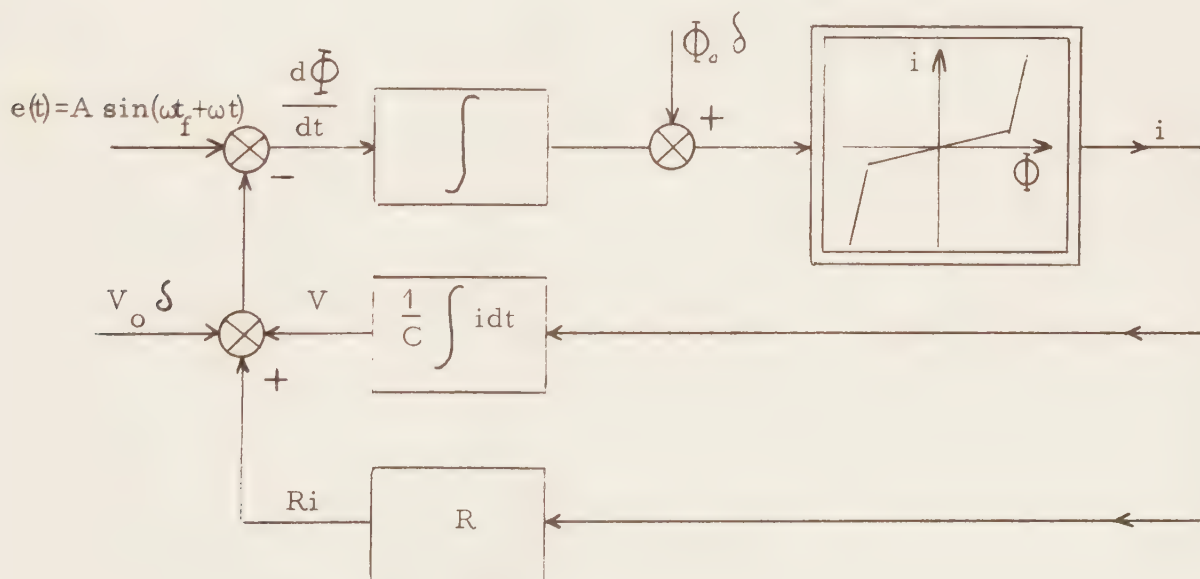


Figure VII. 4.

On en déduit le système échantillonné de la figure VII. 5

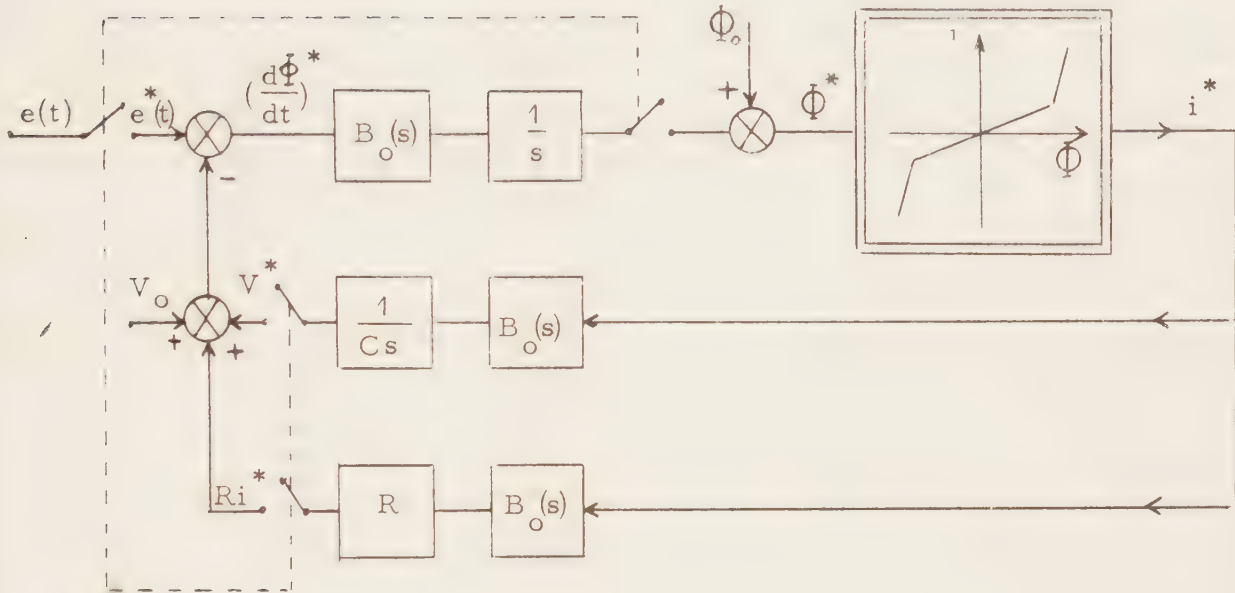


Figure VII. 5.

La transformation des intégrations pures donne

$$Z \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{1}{s} \right] = \frac{T z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (\text{VII. 3})$$

ce qui entraîne

$$\Phi_n = T \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)_{n-1} + \Phi_{n-1}$$

et

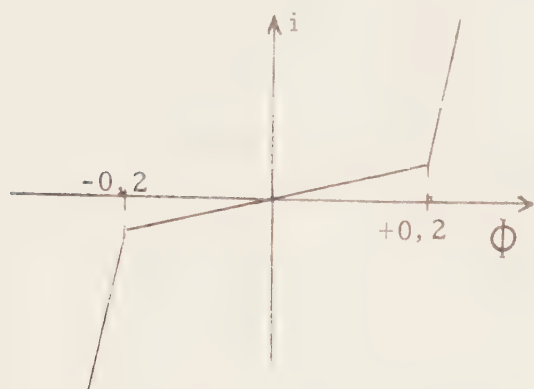
$$V_n = \frac{T}{C} i_{n-1} + V_{n-1} \quad (\text{VII. 4})$$

qui correspond, comme on l'a déjà vu, à intégrer selon des rectangles (à cause de la reconstitution par le bloqueur d'ordre zéro).

Pour le multiplicateur, on a la sortie égale à Ri_n , d'où

$$\left(\frac{d\Phi}{dt} \right)_n = e_n - Ri_n - V_n \quad (\text{VII. 5})$$

L'élément non linéaire, qui donne i_n en fonction de Φ_n est programmé selon l'organigramme suivant :



$$i_n = 0,1 \Phi_n \quad \text{pour } |\Phi_n| < 0,2$$

$$i_n = 1,6 \Phi_n - 0,318$$

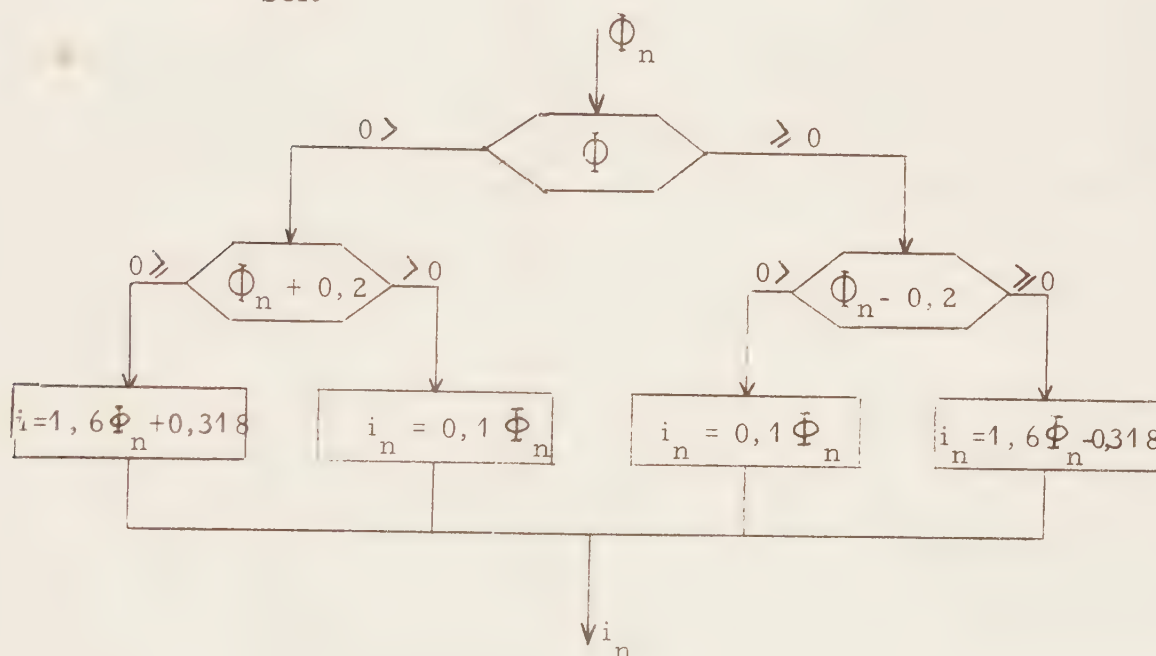
$$\text{pour } \Phi_n \geq 0,2$$

$$i_n = 1,6 \Phi_n + 0,318$$

$$\text{pour } \Phi_n \leq -0,2$$

Figure VII. 6.

Soit



Le programme de résolution, très simple, donné en annexe V, permet de calculer le courant i et le flux Φ pour des valeurs quelconques de A , C , R , Φ_0 , $V_0 = \frac{Q_0}{C}$ et de l'instant d'application t_f de l'excitation $A \sin \omega t'$, comme le montre la figure VII. 7.

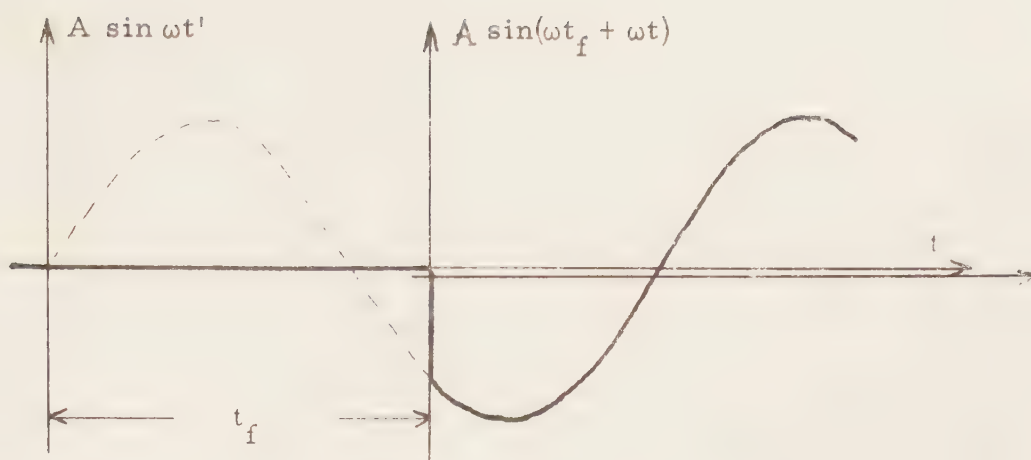


Figure VII. 7.

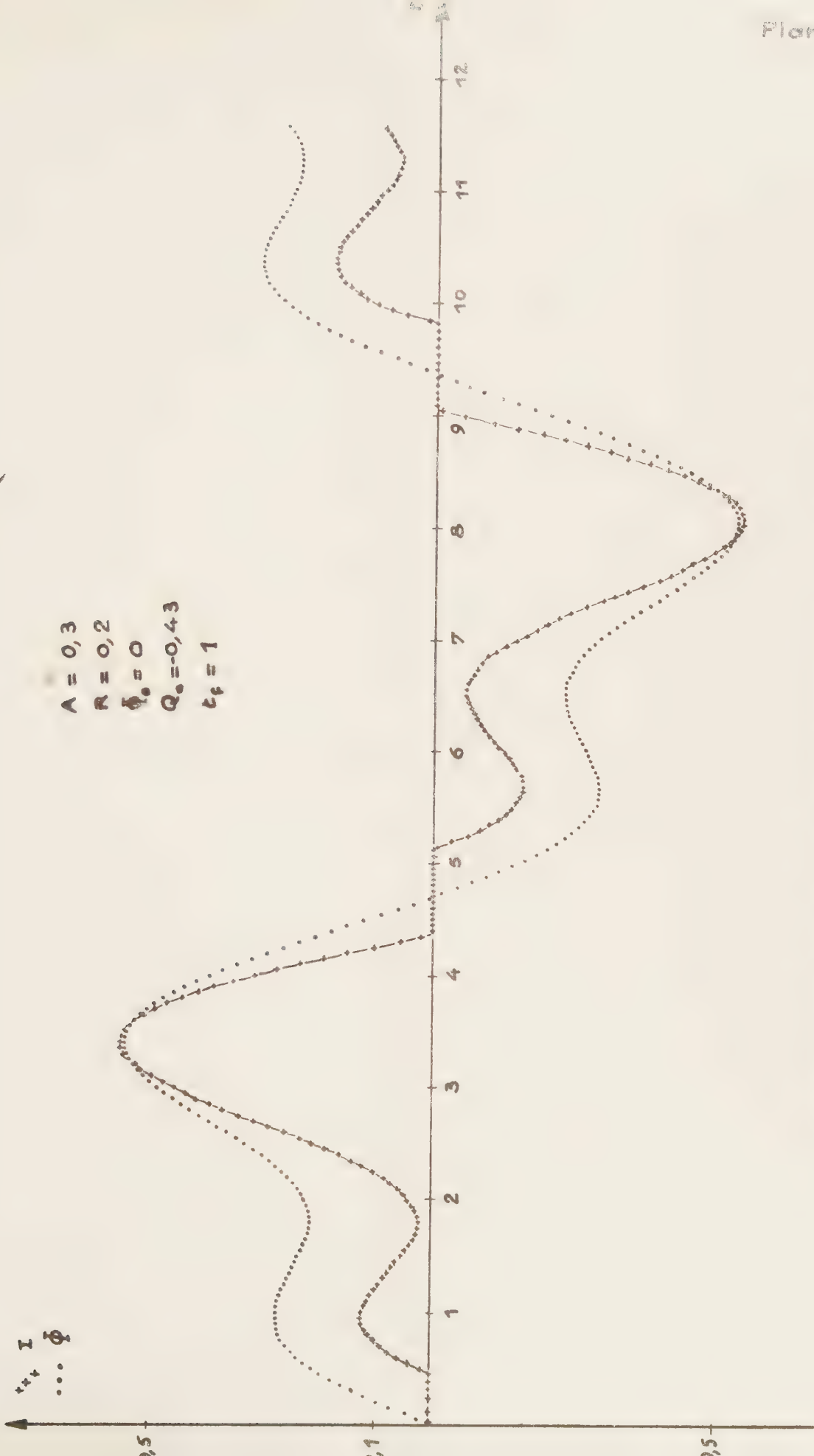
Résultats.

La résolution analytique d'un tel système est fastidieuse, de même que l'introduction des conditions initiales pour la simulation analogique, alors que la résolution numérique est simple et les résultats tout à fait conformes à ceux de M. Lamotte (cf. référence [18] figures 23 et 24).

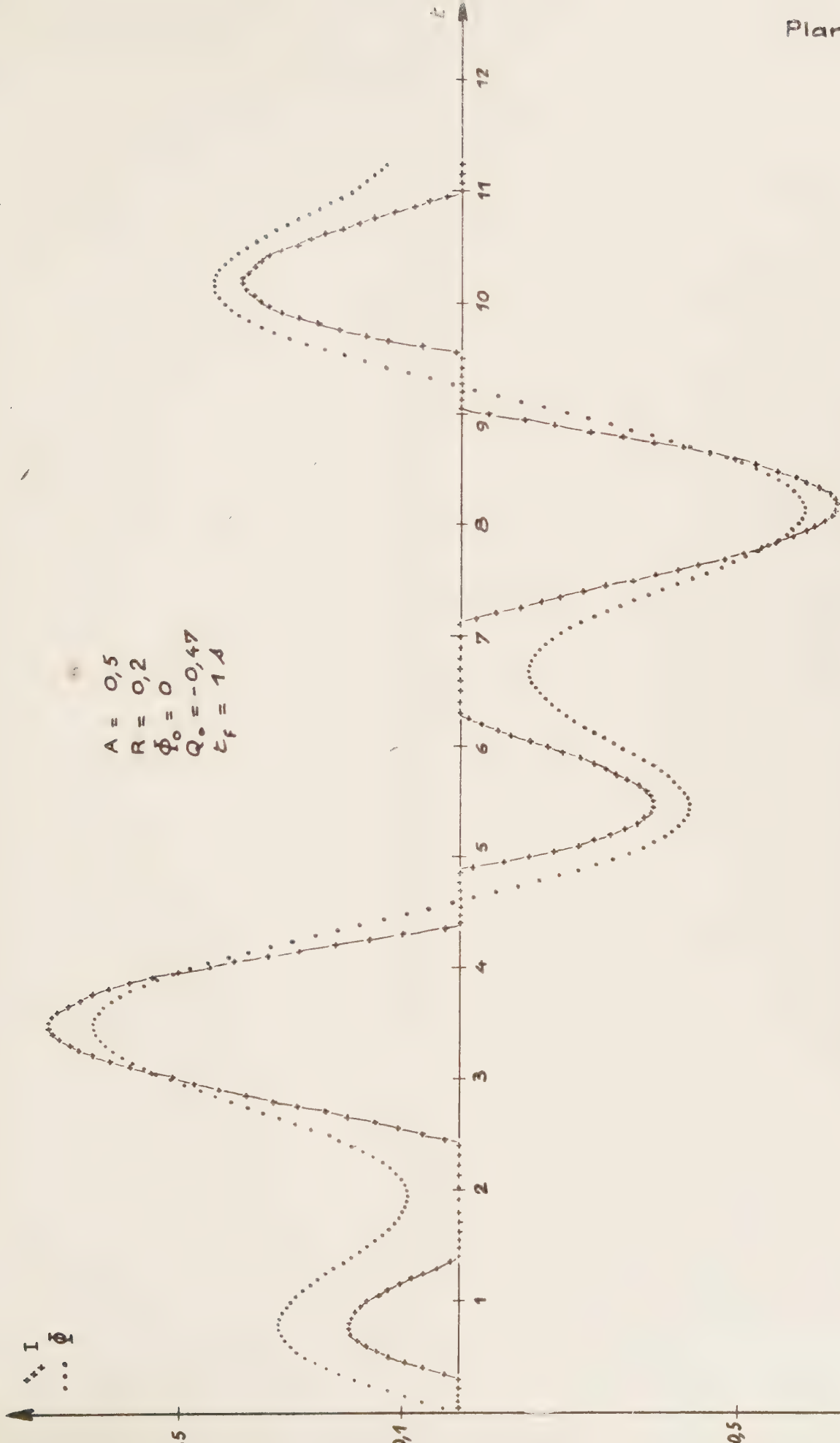
Les valeurs ainsi calculées pour $\omega = 2$, $C = 1/0,6$, $T = 0,01$ et avec

A	R	Φ_0	Q_0	t_f	Courbe
0,3	0,2	0	-0,43	1	Planche 9.1
0,5	0,2	0	-0,47	1	Planche 9.2
1	0,3	0	-1	2	Planche 9.3
1	0,3	0,2	-0,5	2	Planche 9.4

représentées sur les planches 9, où on a représenté un seul point sur cinq calculés, correspondent à l'amorçage du sous-harmonique d'ordre 3 pour les deux premières, et à l'amorçage d'un régime de ferrorésonance pour les deux autres, du en particulier à l'amplitude plus grande de l'excitation.

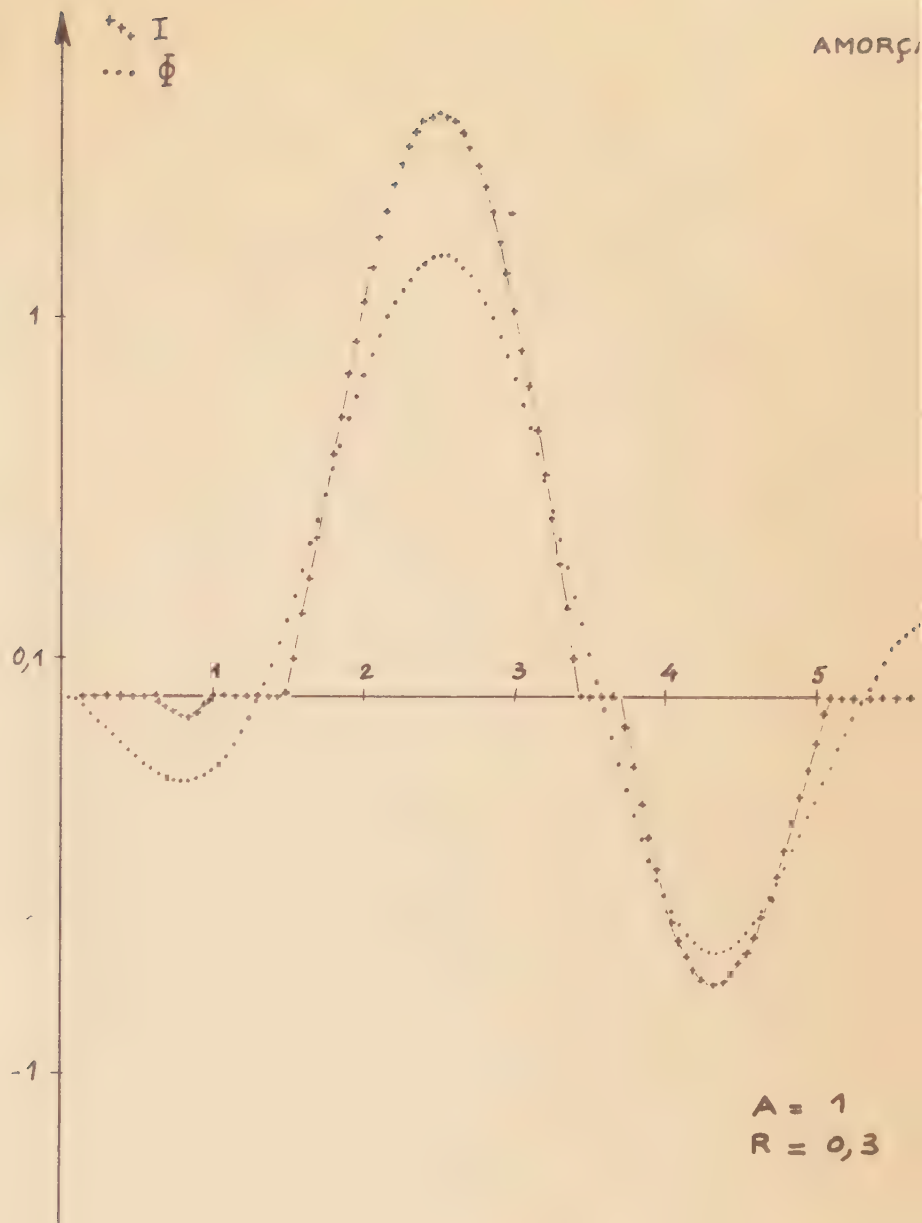


AMORÇAGE DU SOUS-HARMONIQUE D'ORDRE 3

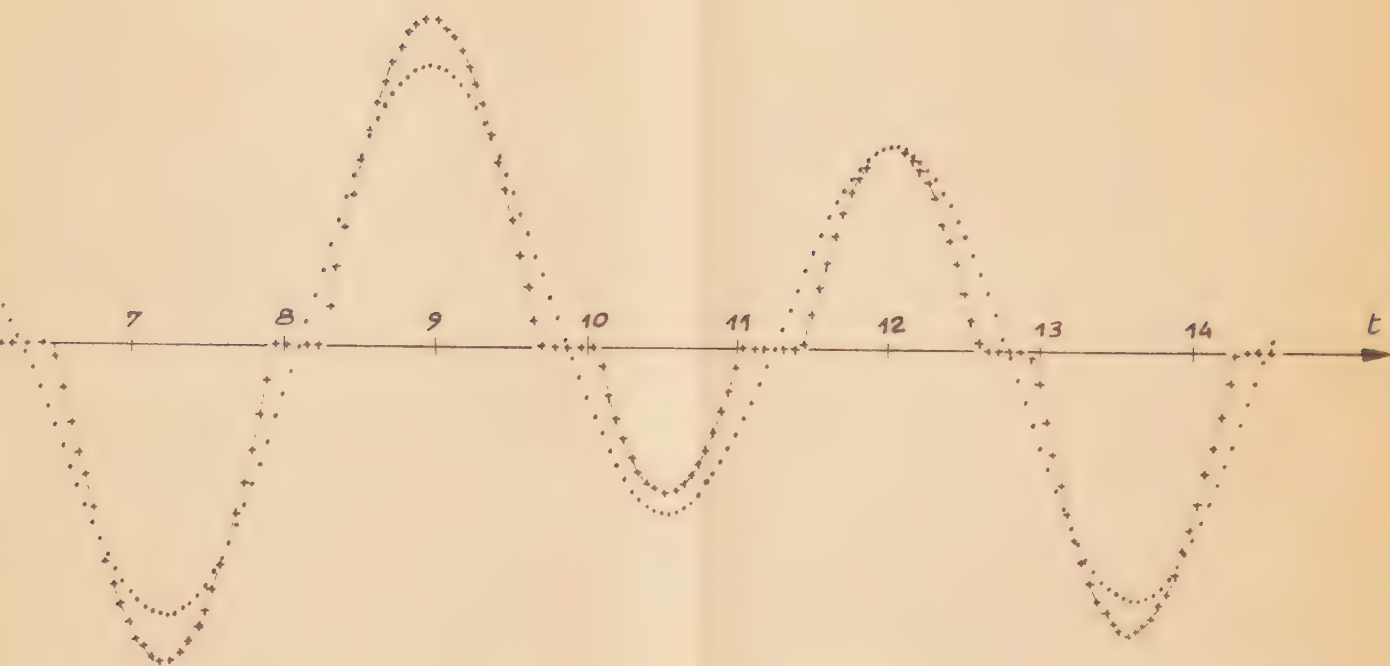


AMORÇAGE DU SOUS-HARMONIQUE D'ORDRE 3

AMORÇ



D'UN REGIME DE FERRORESONANCE



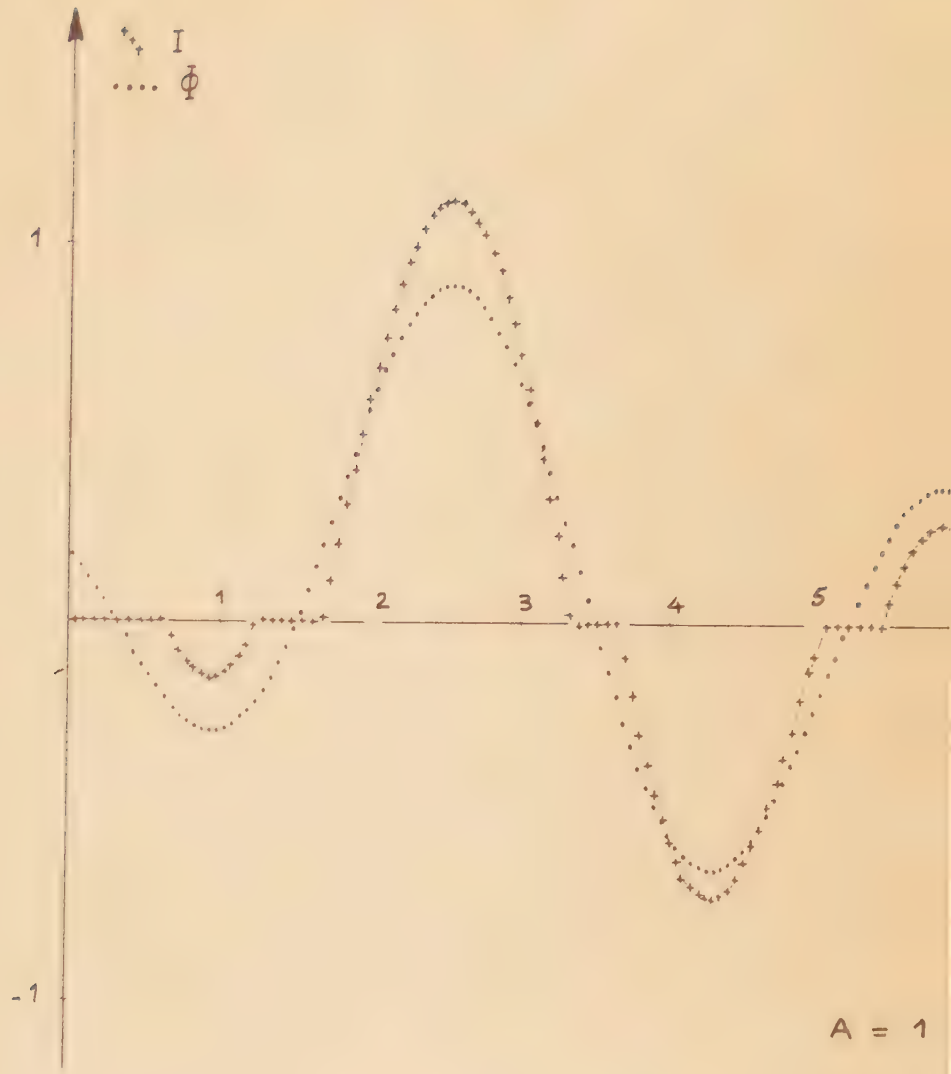
$$\Phi_0 = 0$$

$$Q_0 = -1$$

$$t_f = 2\Delta$$

1 point sur 5 calculés

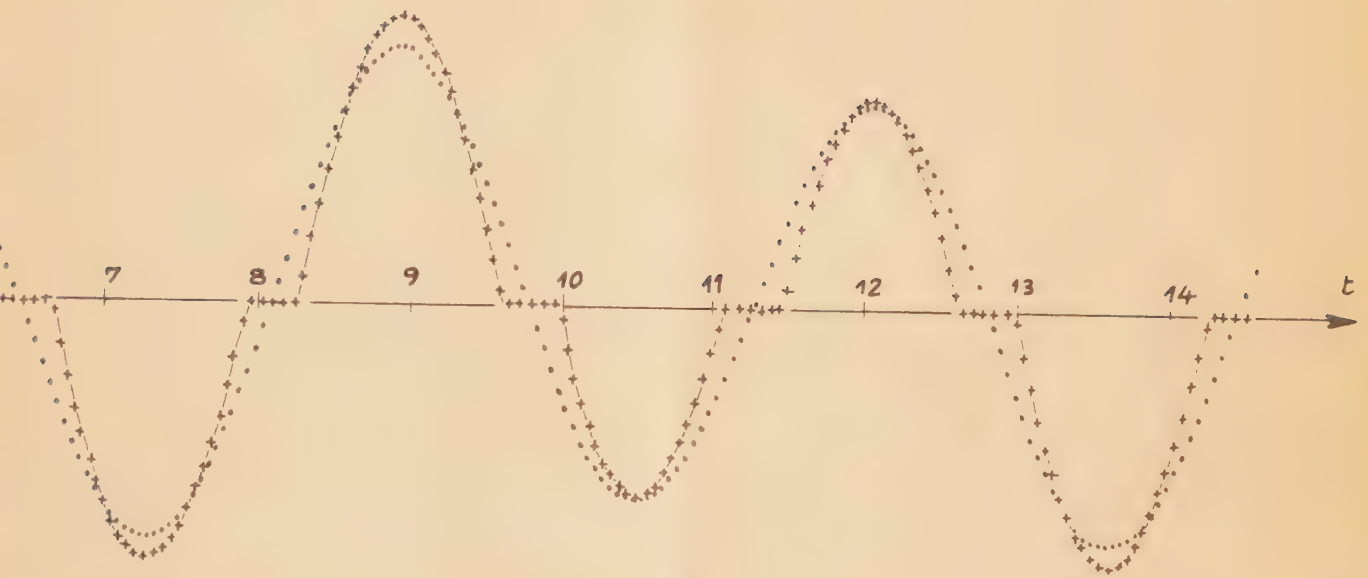
AMORQ



$$A = 1$$

$$R = 0$$

E D'UN REGIME DE FERRORESONANCE



$$\Phi_0 = 0,2$$

$$Q_0 = -0,5$$

$$t_f = 2 \text{ s}$$

1 point sur 5 calculés

VII. 3. Simulation de l'équation de Van der Pol.

L'équation de Van der Pol [19]

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \mathcal{E} (1 - y^2) \frac{dy}{dt} + y = 0 \quad (\text{VII. 6})$$

définit un système oscillant à amortissement variable. C'est en particulier le cas de certains oscillateurs électroniques : si le déplacement y est petit, l'amortissement est négatif et devient positif pour un déplacement supérieur à 1.

La nature de la solution dépendant de la valeur du paramètre $\mathcal{E}$ vis-à-vis de l'unité, on prendra pour la simulation numérique $\mathcal{E} = 0,2$ et $\mathcal{E} = 5$, valeurs pour lesquelles W. J. Cunningham [19] donne les cycles limites dans le plan de phase $\frac{dy}{dt}$, y .

L'équation (VII. 6) s'écrit

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \mathcal{E} \frac{dy}{dt} + y = - \mathcal{E} y^2 \frac{dy}{dt}$$

et en posant $r = y^3$, d'où $\frac{dr}{dt} = 3y^2 \frac{dy}{dt}$, on a

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \mathcal{E} \frac{dy}{dt} + y = - \frac{\mathcal{E}}{3} \frac{dr}{dt} \quad (\text{VII. 7})$$

dont la transformée de Laplace est

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) - \mathcal{E} (s Y(s) - y(0)) + Y(s) = - \frac{\mathcal{E}}{3} s R(s)$$

Sous la forme

$$Y(s) = - \frac{\mathcal{E}}{3} \frac{s}{s^2 - \mathcal{E} s + 1} R(s) + \frac{s - \mathcal{E}}{s^2 - \mathcal{E} s + 1} y(0) + \frac{1}{s^2 - \mathcal{E} s + 1} y'(0)$$

cette équation fournit le schéma analogique de la figure (VII. 8).

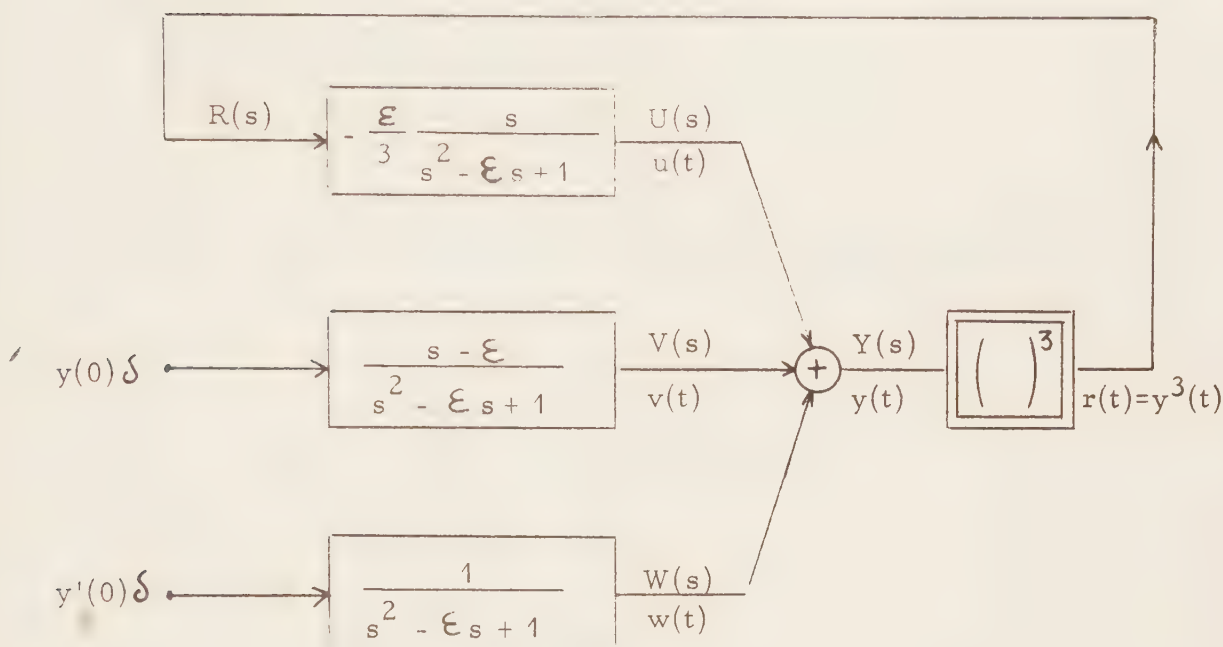


Figure VII. 8.

Pour simplifier l'écriture, posons

$$\left. \begin{aligned} H(s) &= -\frac{\xi}{3} \frac{s}{D(s)} \\ H^0(s) &= \frac{s - \xi}{D(s)} \\ H^1(s) &= \frac{1}{D(s)} \end{aligned} \right\} \text{ avec } D(s) = s^2 - \xi s + 1 \quad (\text{VII. 8})$$

On en déduit immédiatement le circuit échantillonné de la figure (VII. 9) dans laquelle le bloqueur choisi est d'ordre zéro.

Les transformées en z ainsi définies fournissent les coefficients nécessaires à la résolution itérative de l'équation de Van der Pol.

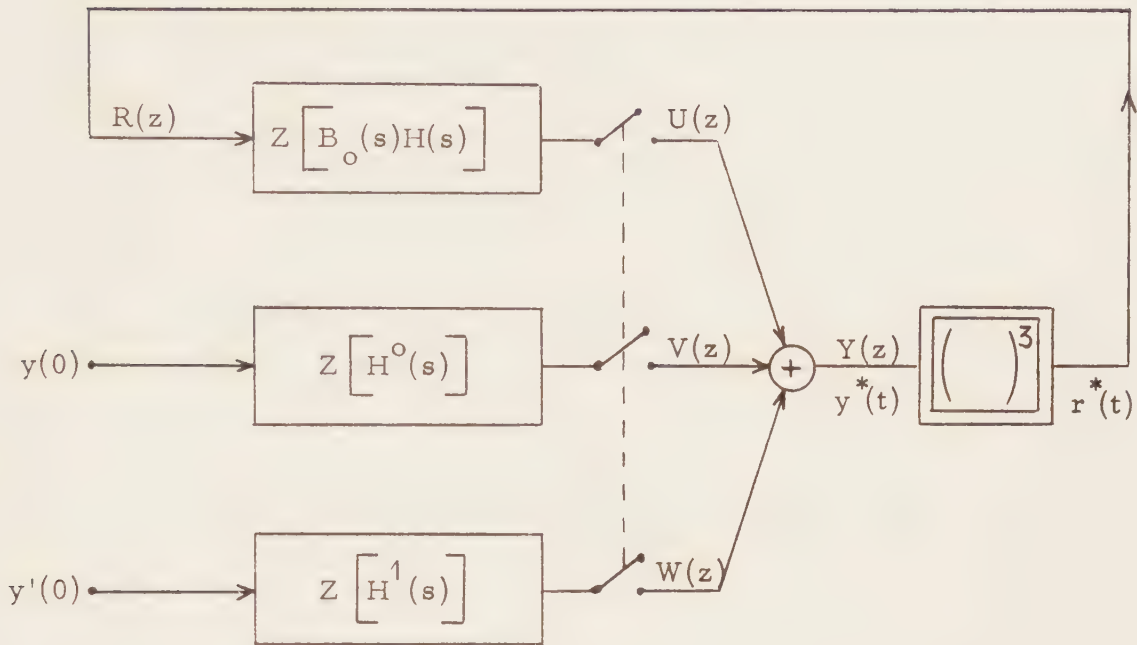


Figure VII. 9.

Si $D(s)$ a des racines complexes, soit pour $\xi < 2$, on a successivement

$$\begin{aligned} Z[B_o(s). H(s)] &= -\frac{\xi}{3} \frac{1}{b} \frac{e^{aT} \cdot \sin bT(1-z^{-1}) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot e^{aT} \cdot \cos bT \cdot z^{-1} + e^{2aT} \cdot z^{-2}} \\ &= \frac{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}}{1 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}} \end{aligned}$$

$$\text{avec } a = \frac{\xi}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{4 - \xi^2}}{2}$$

et

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{\xi}{3} \frac{1}{b} e^{aT} \cdot \sin bT, & p_2 &= -p_1 \\ q_1 &= -2e^{aT} \cdot \cos bT, & q_2 &= e^{2aT} \end{aligned} \quad (\text{VII. 9})$$

$$Z [H^0(s)] = \frac{1 + z^{-1} \left[\frac{\xi}{2} \frac{1}{b} \cdot e^{aT} \cdot \sin bT - e^{aT} \cdot (\cos bT) \right]}{1 - 2e^{aT} \cdot \cos bT \cdot z^{-1} + e^{2aT} \cdot z^{-2}}$$

$$= \frac{p_0^0 + p_1^0 z^{-1}}{1 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}$$

avec $p_0^0 = 1$ et $p_1^0 = \frac{\xi}{2} \frac{1}{b} e^{aT} \cdot \sin bT - e^{aT} \cdot \cos bT$ (VII.10)

$$Z [H^1(s)] = \frac{1}{b} \frac{e^{aT} \cdot \sin bT \cdot z^{-1}}{1 - 2e^{aT} \cdot \cos bT \cdot z^{-1} + e^{2aT} \cdot z^{-2}}$$

$$= \frac{p_1^1 z^{-1}}{1 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}$$

avec $p_1^1 = \frac{1}{b} e^{aT} \cdot \sin bT$ (VII.11)

Pour $\xi > 2$, $D(s)$ a des racines réelles et alors :

$$Z [B_0(s) \cdot H(s)] = \frac{\xi}{3} \frac{(Ae^{s_2 T} + Be^{s_1 T})z^{-1} (1 - z^{-1})}{1 - (e^{s_1 T} + e^{s_2 T})z^{-1} + e^{s_1 T} \cdot e^{s_2 T} z^{-2}}$$

avec $s_1 = \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 4}}{2}$, $s_2 = \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - 4}}{2}$

$$A = \frac{1}{s_1 - s_2} , \quad B = \frac{1}{s_2 - s_1}$$

et ainsi

$$p_1 = \frac{\xi}{3} (A e^{s_2 T} + B e^{s_1 T})$$

$$p_2 = -p_1$$

$$q_1 = -(e^{s_1 T} + e^{s_2 T})$$

$$q_2 = e^{s_1 T} \cdot e^{s_2 T}$$

(VII.12)

$$Z [H^0(s)] = \frac{1 - z^{-1} (C e^{s_2 T} + D e^{s_1 T})}{1 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}$$

avec

$$C = \frac{s_1 - \mathcal{E}}{s_1 - s_2}, \quad D = \frac{s_2 - \mathcal{E}}{s_2 - s_1},$$

$$p_o^o = 1 \quad (\text{VII.13})$$

$$p_1^o = - (C e^{s_2 T} + D e^{s_1 T}) ;$$

$$Z [H^1(s)] = \frac{-(A e^{s_2 T} + B e^{s_1 T}) z^{-1}}{1 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}$$

avec les mêmes expressions de A et B que pour $Z [B_o(s). H(s)]$

$$\text{d'où} \quad p_1^1 = - (A e^{s_2 T} + B e^{s_1 T}) \quad (\text{VII.14})$$

Initialisation et récurrence.

D'après les valeurs des coefficients, les valeurs successives sont :

- pour $n = 0$:

$$\begin{aligned} u_o &= 0 & \text{puisque } p_o^o &= 0 \\ v_o &= y(0) & \text{puisque } p_o^o &= 1 \\ w_o &= 0 & \text{puisque } p_o^1 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VII.15})$$

$$\text{d'où } y_o = y(0) \quad \text{et} \quad r_o = y^3(0)$$

- pour $n = 1$:

$$\begin{aligned} u_1 &= p_1^1 r_o \\ v_1 &= p_1^o y(0) - q_1 v_o \quad \text{avec } v_o = y(0) \\ w_1 &= p_1^1 y'(0) \end{aligned} \quad (\text{VII.16})$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } y_1 &= (p_1^o - q_1) y(0) + p_1^1 y'(0) + p_1 y^3(0) \\ \text{et } r_1 &= y_1^3 \end{aligned}$$

Remarque :

En développant les expressions des coefficients et en ne conservant que les premiers termes, on a

$$y_1 \simeq y_0 + T y'(0) - \frac{\varepsilon}{3} T y^3(0) \quad (\text{VII.17})$$

ce qui met en évidence le régime libre et le régime forcé sous une forme simple.

- pour $n = 2$:

$$u_2 = p_1 r_1 + p_2 r_0 - q_1 u_1 - q_2 u_0$$

$$v_2 = -q_1 v_1 - q_2 v_0 \quad (\text{VII.18})$$

$$w_2 = -q_1 w_1 - q_2 w_0$$

d'où
$$y_2 = p_1 r_1 + p_2 r_0 - q_1 y_1 - q_2 y_0$$

Après l'initialisation des deux premières valeurs y_0 et y_1 , on obtient ainsi la récurrence d'expression générale

$$y_n = p_1 r_{n-1} + p_2 r_{n-2} - q_1 y_{n-1} - q_2 y_{n-2} \quad (\text{VII.19})$$

Pour le calcul numérique, la récurrence commence à $n = 2$, les valeurs y_1 et y_0 étant initialement données aux mémoires Y1 et Y2, relatives aux termes courants y_{n-1} et y_{n-2} .

Résultats.

Le programme dont on trouvera le détail en Annexe VI fournit les valeurs numériques $y_n = y(nT)$, solution en fonction du temps, ainsi que les valeurs de la dérivée, nécessaires pour le tracé dans le plan de phase, par l'expression approchée

$$\left(\frac{dy}{dt} \right)_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{T} \quad (\text{VII.20})$$

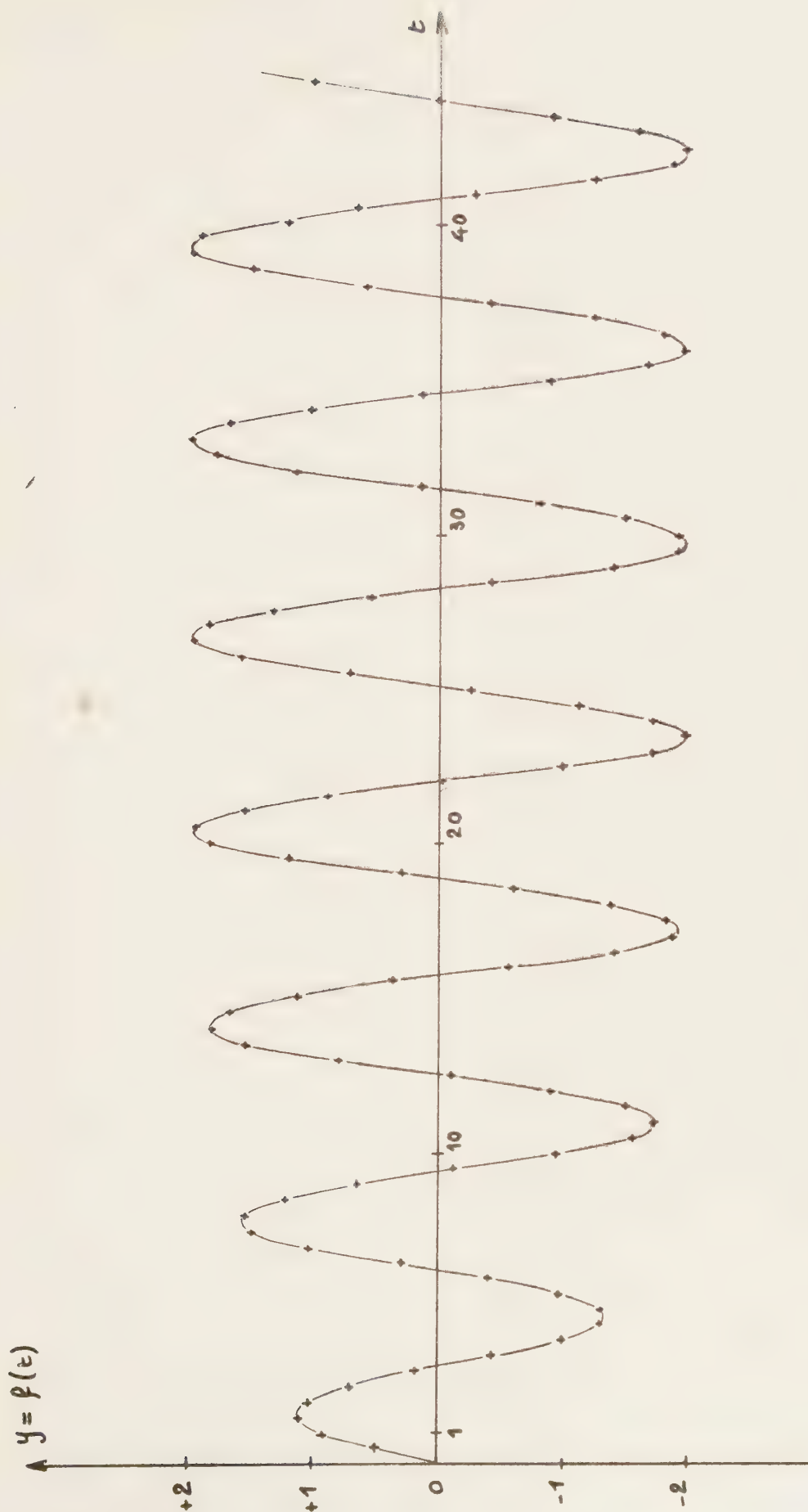
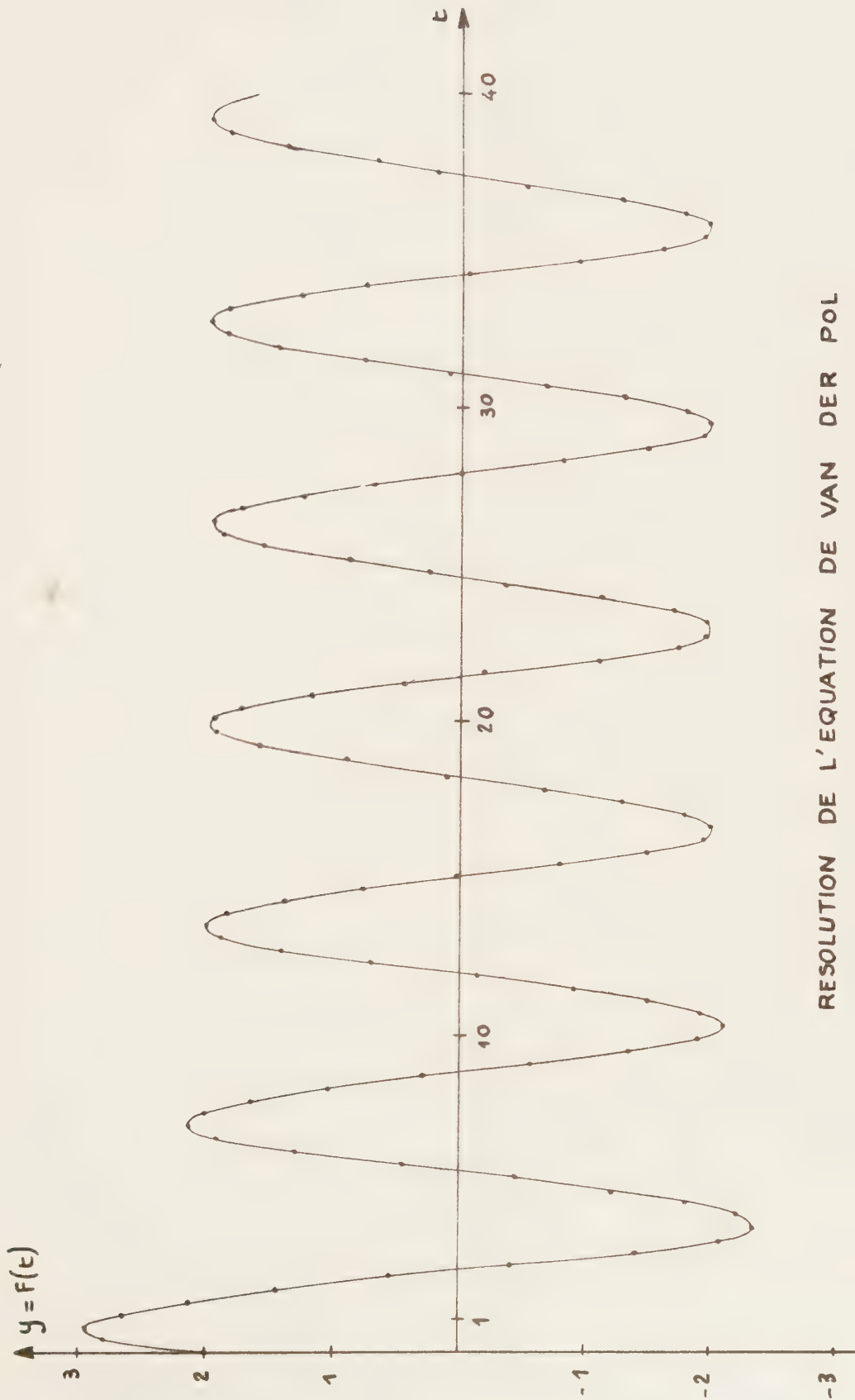


Planche 10,1

RESOLUTION DE L'EQUATION DE VAN DER POL

$$y_n = y(nt) \quad \text{pour} \quad \begin{cases} \varepsilon = 0,2 \\ y_0 = 0 \\ y'_0 = 1 \end{cases}$$

$T = 0,02$
1 point sur 25 calculés
soit toutes les 0,5 s

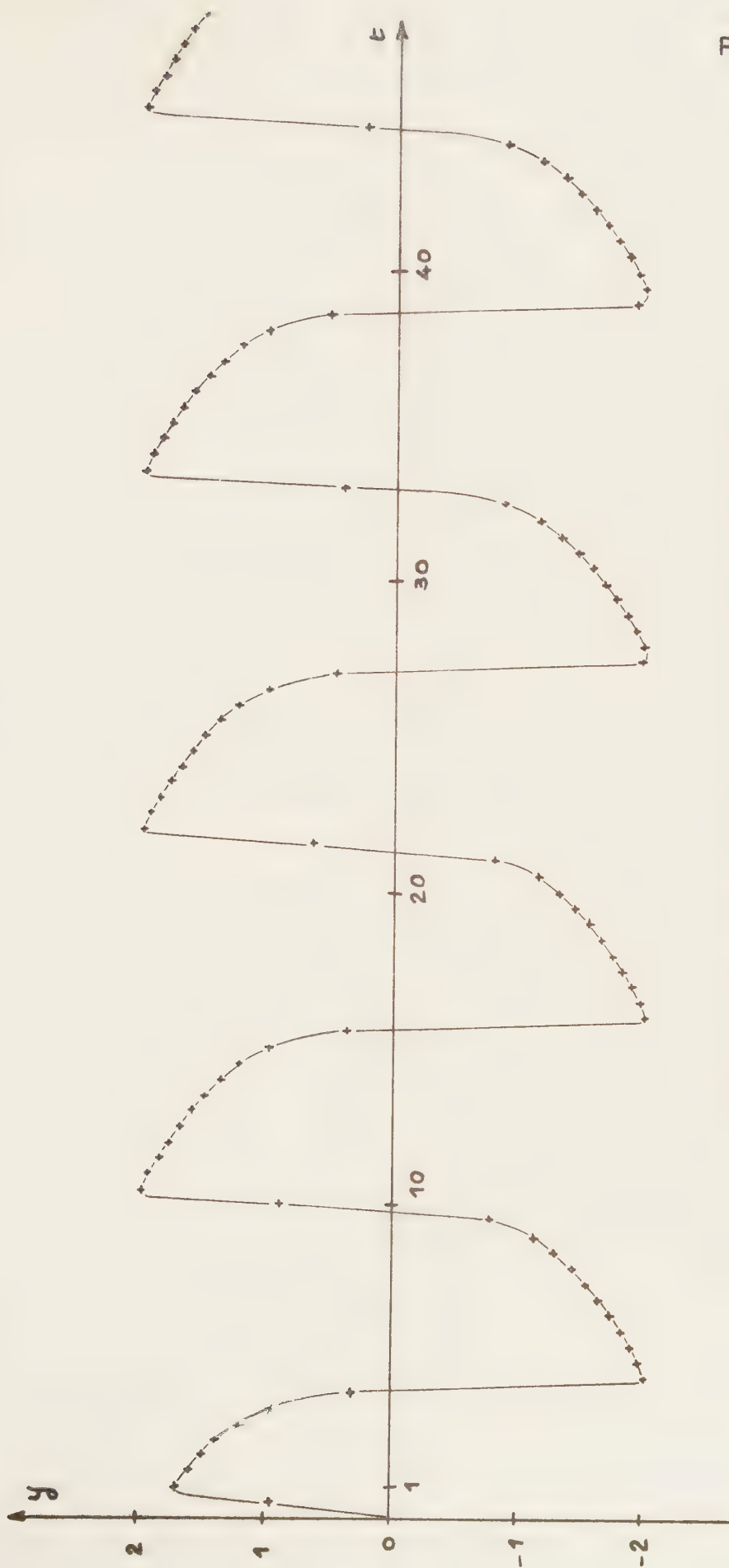


RESOLUTION DE L'EQUATION DE VAN DER POL

$$y_n = y(nt) \quad \text{pour} \quad \begin{aligned} \varepsilon &= 0,2 \\ y_0 &= 2 \\ y'_0 &= 3 \end{aligned}$$

$$T = 0,01$$

1 point sur 40 calculés
soit toutes les 0,4 Δ

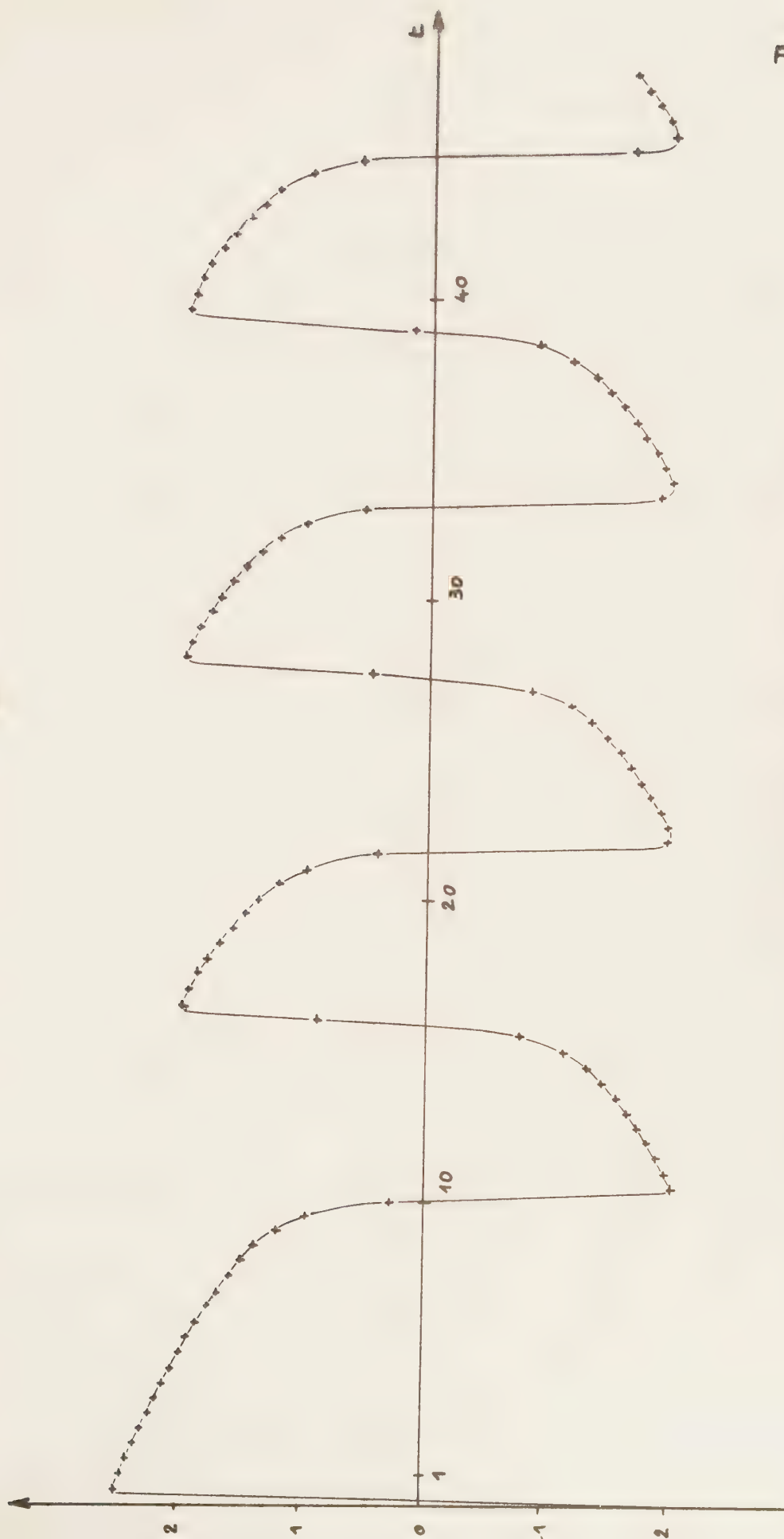


RESOLUTION DE L'EQUATION DE VAN DER POL

$$y_n = f(nt) \text{ pour } \begin{cases} \varepsilon = 5 \\ y_0 = 0 \\ y'_0 = 0,5 \end{cases}$$

$$T = 0,02$$

1 point sur 25 calculés
soit toutes les 0,5 d



RESOLUTION DE L'EQUATION DE VAN DER POL

$y_n = y(nt)$ pour $E = 5$

$y_0 = -2$

$y'_0 = 4$

$T = 0,01$

1 point sur 50 calculés

soit toutes les 95 A

DIAGRAMME VITESSE - DEPLACEMENT

$$\varepsilon = 0,2$$

$$y_0 = 0$$

$$y'_0 = 1$$

$$T = 0,02$$

1 point toutes les 0,5 Δ

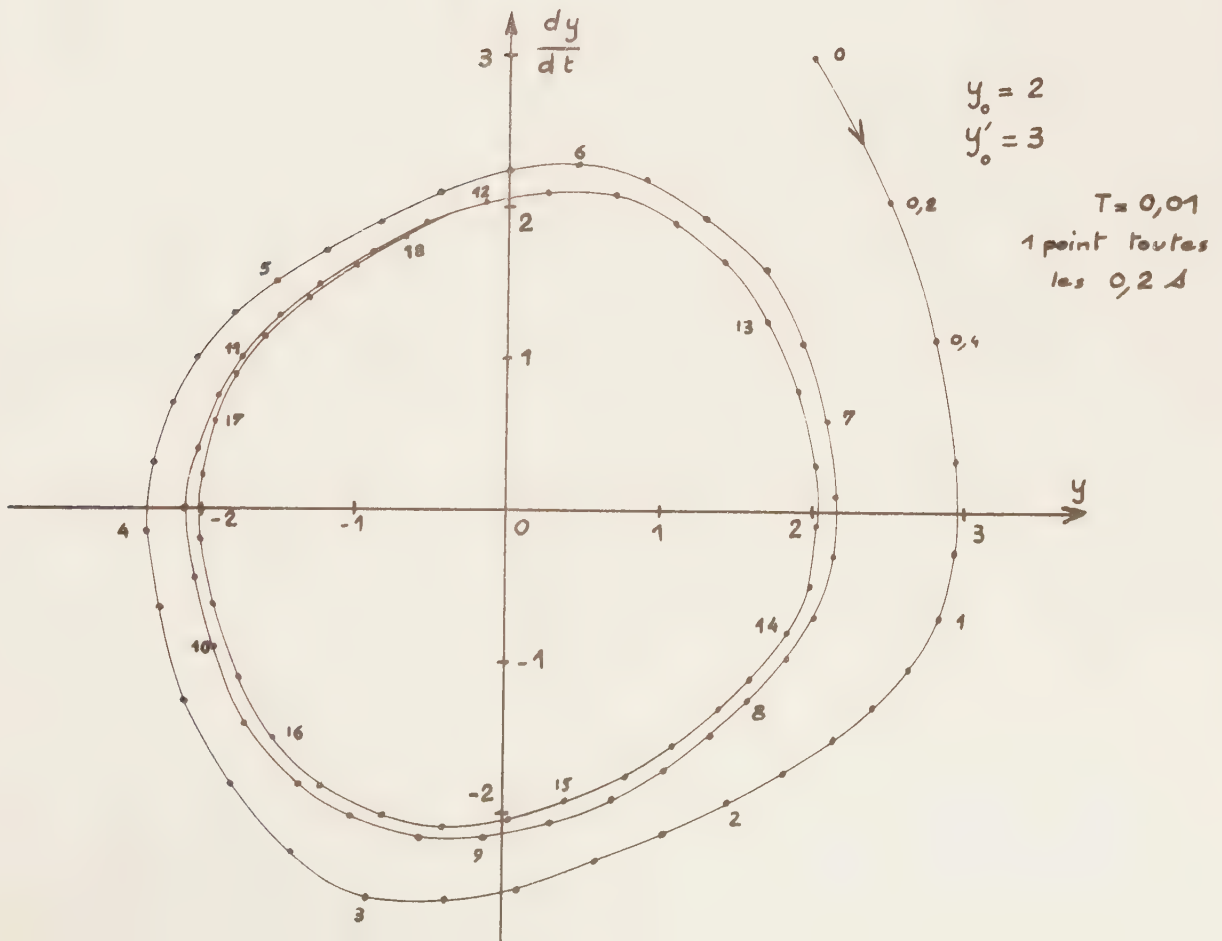
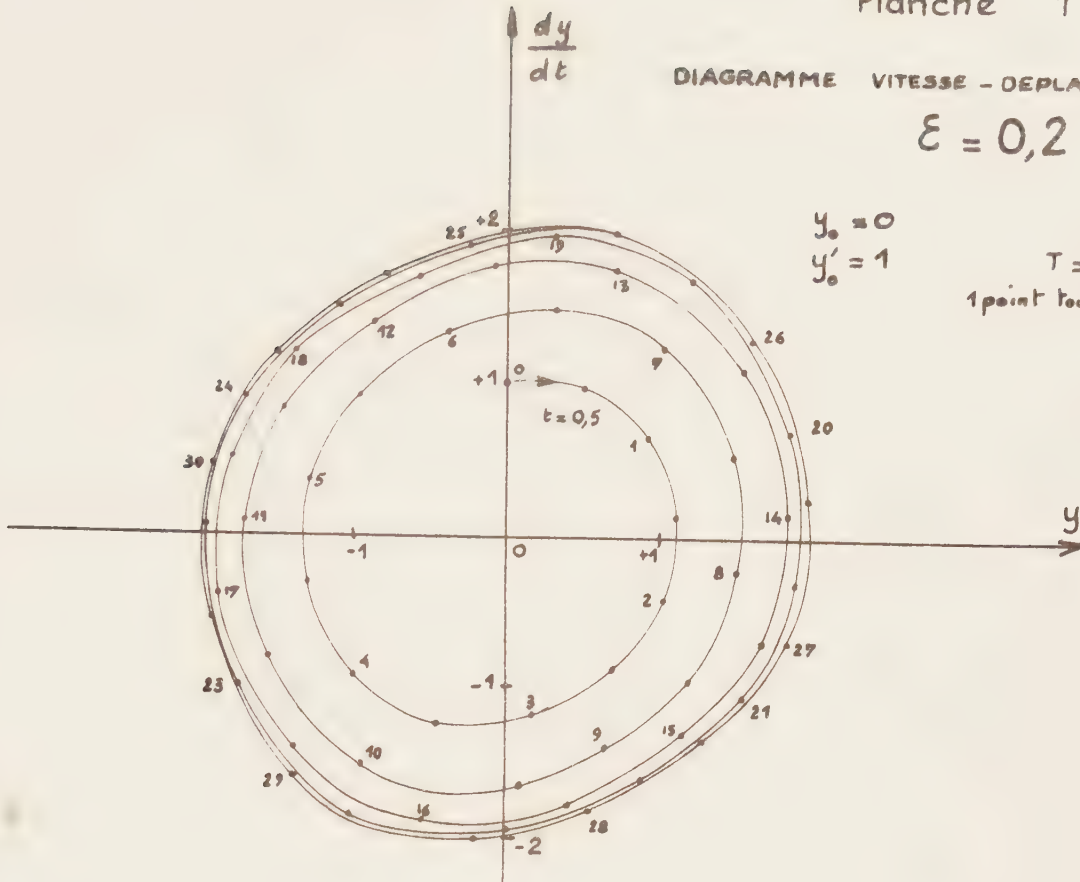
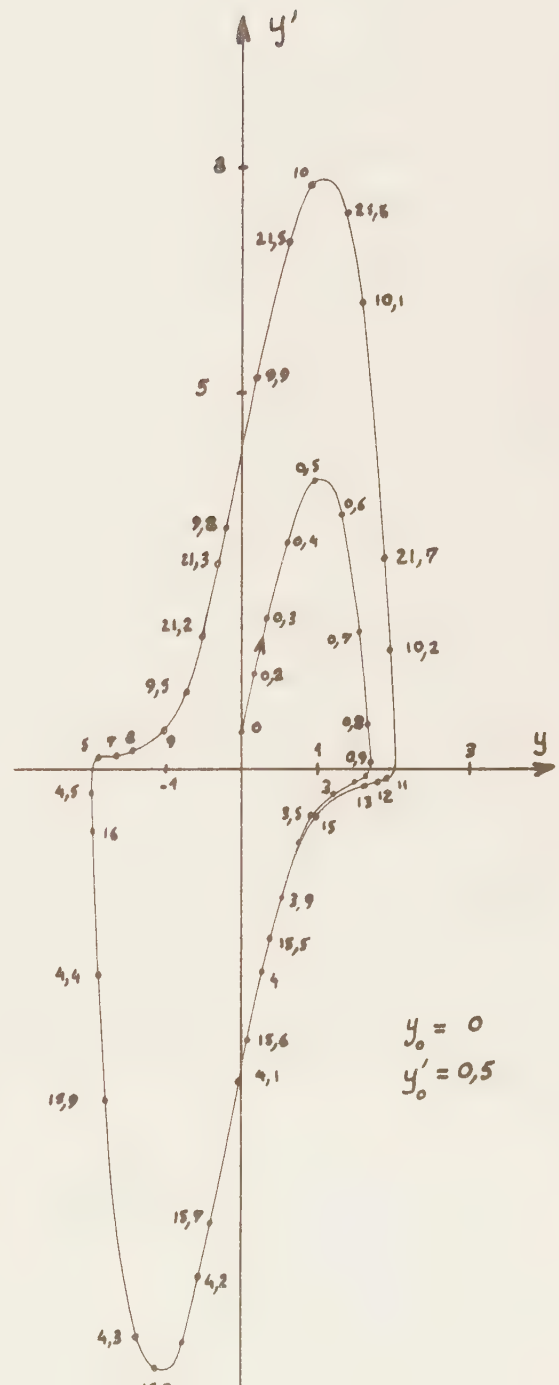
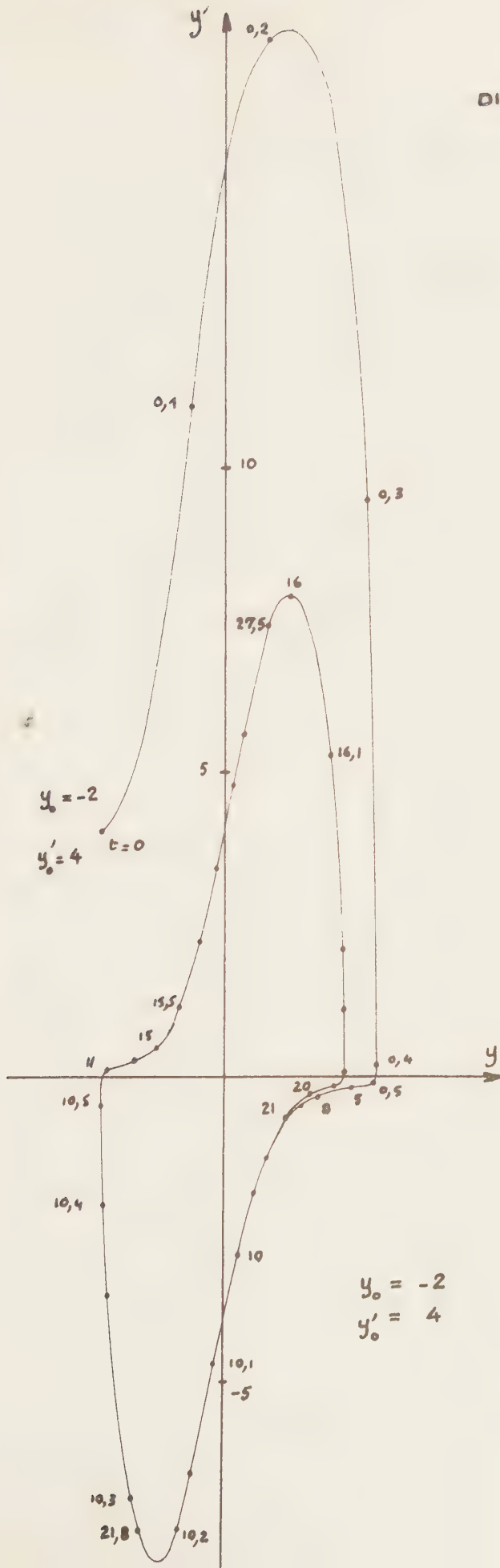


DIAGRAMME VITESSE - DEPLACEMENT

$$\xi = 5$$



La solution obtenue est ainsi directement paramétrée en fonction du temps.

Les résultats numériques obtenus pour différentes valeurs des conditions initiales et les valeurs 0,2 et 5 du paramètre $\mathcal{E}$ se confondent avec ceux donnés par les autres méthodes qui ont l'inconvénient d'exiger la reprise complète des calculs pour chaque ensemble de valeurs numériques.

Les graphiques des planches 10 représentent quelques unes des solutions déterminées en fonction du temps, et les planches 11 les diagrammes vitesse-déplacement correspondants, mettant ainsi en évidence les cycles limites relatifs à $\mathcal{E} = 0,2$ et 5.

* * *

CONCLUSION.

La méthode de simulation proposée est la transposition numérique du calcul analogique, dont on peut utiliser toutes les possibilités, avec en plus, la rigueur du calcul numérique électronique et sa souplesse de programmation.

L'identification du bloc de calcul numérique à la transformée en z de la transmittance étudiée, à laquelle on adjoint, pour le régime forcé, un bloqueur, conduit à un calcul simple et systématique des coefficients nécessaires aux relations de récurrence, indépendants de la fonction d'excitation.

L'introduction des conditions initiales ne présente pas de difficultés.

On obtient ainsi, pour un type de système donné, un programme unique, calculant les valeurs de sortie de l'installation pour une excitation quelconque dans la mesure où celle-ci est définie sur l'intervalle de temps considéré, ce qui est toujours le cas en physique.

Cette simulation numérique, qui décrit parfaitement le régime libre et fournit la solution forcée avec une précision largement suffisante pour l'analyse pratique, facilite ainsi l'étude des systèmes industriels, en particulier pour les automaticiens, dont elle utilise le langage.

Cependant, toute simulation suppose la connaissance du modèle mathématique du système, aussi envisageons-nous l'utilisation de cette méthode pour l'identification de processus et l'optimisation de leur fonctionnement :

le calculateur numérique, qui fonctionne alors "en ligne", reçoit directement des valeurs d'entrée fournies par des capteurs et les valeurs calculées de sortie sont comparées aux grandeurs de sortie du processus. Une boucle d'adaptation, agissant sur les coefficients de la fonction génératrice du bloc de calcul, minimise l'erreur quadratique entre les sorties réelle et calculée.

Une autre application de cette méthode sera développée dans le cadre des activités du Centre Universitaire de Commande Numérique pour la génération de courbes et de surfaces qui définissent la géométrie d'une pièce à usiner par machine outil à commande numérique.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] . M.H. HAMZA, Continuous system Modeling using a digital Computer, Nouvelles Techniques Suisses, 1969, t.11, n°2, p. 89-94.
- [2] . B.N. CHATTERJI, S. SIKDAR, A simple digital simulation of control systems, J. Instr. Telecomm. Engrs., India, 1968, t.14, n°10, p. 443-446.
- [3] S.K. AGARWAL, I.J. NAGRATH, A digital Computer programme for simulation of dynamic systems, J. Instr. Engrs. Electr. Engrg. Div., India, 1968, n°2, p. 1-3.
- [4] J. LEGRAS, Précis d'analyse numérique, Dunod, 1963, Paris, p. 167-196.
- [5] . N. CHORAFAS, Systems and simulation, Academic Press, Londres 1965, p. 99-119.
- [6] . P. NASLIN, Les régimes variables dans les systèmes linéaires et non linéaires, Dunod 1962, chap. 10, p. 411-443.
- [7] . E. JURY, Theory and application of the z transform method, J. Wiley, Londres 1964.
- [8] . B.C. KUO, Analysis and synthesis of sampled data control systems, Prentice Hall, 1963.
- [9] . R. BOXER, S. THALER, A simplified method of solving linear and non linear systems, Proceeding of the IRE 44, janvier 1956, p. 89-101.
- [10] . P. JÖRGENSEN,
 - Double transformée et formulation récurrente pour la résolution de systèmes d'équations différentielles ou aux différences, C. R. Ac. Sc., 267, p. 650-652, 1968.
 - Formulation récurrente et double transformée en $J/\mathcal{C} P$, Automatisme, XIII, n° 11, p. 558-566 et n° 12, p. 615-622
 - Principes et applications de la double transformée en $J/\mathcal{C} P$, L'Onde Electrique, n° 510, 1969, p. 823-835.

- [11] . J. R. RAGAZZINI, G. F. FRANKLIN, Les systèmes asservis échantillonnés, Dunod 1962, p. 58-66 , Annexe et p. 72-82.
- [12] . M. VERON, Simulation numérique d'un système linéaire par une formulation récurrente déduite de la transformation en z , C. R. Ac. Sc. , 271, 100-102, 1970.
- [13] . Y. SEVELY, Systèmes et asservissements linéaires échantillonnés , Dunod Université 1969, p. 47-52 et p. 39.
- [14] . L. N. VOLGUINE, Programmation des calculatrices numériques de commande, Dunod 1966, p. 28.
- [15] . H. MINEUR, Techniques de calcul numérique, Dunod 1966, chap. XIV, p. 352-405
- [16] . M. AUBRUN, Détermination du correcteur réalisable d'un système linéaire à partir d'un correcteur théorique, Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, L. E. A. (*) Nancy, 1970.
- [17] . C. HUMBERT, Contribution à l'optimisation quadratique des systèmes linéaires, Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, L. E. A. (*) Nancy, 1970.
- [18] . M. LAMOTTE, Etude des oscillations sous-harmoniques dans un circuit R. L. C. à inductance fortement non linéaire, Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, L. E. A. (*) Nancy, 1967.
- [19] . W. J. CUNNINGHAM, Analyse non linéaire. Résolution des équations différentielles, Dunod 1963, p. 38.

(*) L. E. A. = Laboratoire d'Electricité et d'Automatique.

ANNEXES

Annexe I - Programme de simulation d'un système du deuxième ordre
(cf. chapitre V)

Annexe II - Calcul des solutions analytiques pour un système du
deuxième ordre. Entrée en échelon. Entrée en rampe
(cf. chapitre V)

Annexe III - Tableaux de comparaison de l'erreur totale relative ε_{tr}
à l'erreur de chute relative ε_{cr} (cf. chapitre V)

Annexe IV - Système du quatrième ordre (cf. chapitre VI)
Calcul des coefficients de la récurrence
Programme de simulation

Annexe V - Simulation d'un circuit R, L, C. à inductance fortement non
linéaire (cf. chapitre VII.2)

Annexe VI - Simulation de l'équation de Van der Pol (cf. chapitre VII.3).

* *

ANNEXE I - Programme de simulation d'un système du deuxième ordre

```
// * SYSTEMES DU DEUXIEME ORDRE BLOQUEUR D'ORDRE ZERO
```

```
// FOR
```

```
*IOCS(CARD,1403PRINTER,DISK)
```

```
*LIST SOURCE PROGRAM
```

```
  DIMENSION CR(100)
```

```
  DO 500 NJ=1,20
```

```
  READ(2,900)AB,TO,XL2,BET,TF,T
```

```
C /  CALCUL DE M ET NIPI
```

```
C  TEMPS TOTAL =TF , PERIODE INITIALE =T
```

```
53  CONTINUE
```

```
  XM=TF/T
```

```
  M=XM
```

```
  XN=XM/100.
```

```
  IF(XN-1.)1,1,2
```

```
1  NIPI=1
```

```
  GOTO3
```

```
2  NIPI=XN
```

```
  GOTO3
```

```
3  WRITE(5,903)AB,TO,XL2,BET,T,M,NIPI
```

```
  TI=T
```

```
  TT=100.*T
```

```
C  INITIALISATION A ZERO
```

```
  U1=0.
```

```
  U2=0.
```

```
  C1=0.
```

```
  C2=0.
```

```
  CM=0.
```

```
  XL1=SQRT(XL2)
```

```
C  TEST SUR DELTA
```

```
  IF(XL2-4.*BET)30,20,10
```

```
10  WRITE(5,910)
```

```
  RD=SQRT(XL2-4.*BET)
```

```
  S1=(-XL1+RD)/2.
```

```
  S2=(-XL1-RD)/2.
```

```
  A=1./BET
```

```
  B=(1.+TO*S1)/S1/(S1-S2)
```

```
  CC=(1.+TO*S2)/S2/(S2-S1)
```

```
  X1=EXP(S1*T)
```

```
  X2=EXP(S2*T)
```

```
  A1=-AB*(A*(X1+X2)+B*(1.+X2)+CC*(1.+X1))
```

```
  A2=AB*(A*X1*X2+B*X2+CC*X1)
```

```
  B1=-X1-X2
```

```
  B2=X1*X2
```

```
  WRITE(5,912)A,B,CC,X1,X2
```

```
  GOTO50
```



```

20 WRITE(5,920)
   S=-XL1/2.
   A=4./XL2
   B=TO-2./XL1
   CC=-A
   X=EXP(S*T)
   A1=AB*(B*T*X-CC-A*X)
   A2=AB*X*(A*X-B*T+CC)
   B1=-2.*X
   B2=X*X
   WRITE(5,912)A,B,CC,X
   GO TO 50
30 WRITE(5,930)
   RS=-XL1/2.
   XS=0.5*SQRT(4.*BET-XL2)
   A=1./BET
   B=-A
   CC=TO-XL1/BET
   X=EXP(RS*T)
   YC=COS(XS*T)
   YS=SIN(XS*T)
   A1=-AB*(A*X*YC+B-(CC+B*RS)*X*YS/XS)
   A2=AB*(A*X*X+B*X*YC-(CC+B*RS)*X*YS/XS)
   B1=-2.*X*YC
   B2=X*X
   WRITE(5,932)A,B,CC,X,YC,YS
   GOTO50
50 CONTINUE
   WRITE(5,950)A1,A2,B1,B2,T
   IF(A1)49,49,52
49 WRITE(5,940)T
   GO TO51
51 T=T+TI
   IF(T-TT)53,54,54
54 WRITE(5,960)T
   GOTO500
52 I=1
   J=1
   K=1
55 CONTINUE
   ENTREE EN ECHELON
   R=1.
   C=A1*U1+A2*U2-B1*C1-B2*C2
   IF(C)60,61,61
60 WRITE(5,980)
   GO TO 51

```

C || CAS DE LA RAMPE
 || RI=I
 || R=T*RI


```

61 U=R
   U2=U1
   U1=U
   C2=C1
   C1=C
   IF(CM-C)70,80,80
70 CM=C
   IMAX=I
   GOTO80
80 IF(K-NIPI)90,100,100
100 K=0
   CR(J)=C
   J=J+1
   GOTO90
90 IF(I-M)110,120,120
110 I=I+1
   K=K+1
   GOTO55
120 WRITE(5,1000)
   WRITE(5,1100)(CR(J),J=1,100)
   TM=IMAX
   TMAX=TM*T
   WRITE(5,1500)CM,TMAX
500 CONTINUE
900 FORMAT(4F15.5,2F10.5)
903 FORMAT(1H0,'AB=',F12.5,'TO=',F12.5,'XL2=',F12.5,'BETA=',F12.5,'T='
1,F8.4,'M=',I6,'NIPI=',I5)
940 FORMAT(1H0,'A1 TOUJOURS NEGATIF','T=',F9.5)
980 FORMAT(1H0,'ARRET, LA SORTIE EST NEGATIVE')
1000 FORMAT(1H0,'VALEURS DE LA SORTIE')
1100 FORMAT(1H ,10F12.7)
1500 FORMAT(1H0,15X,'CM=',F10.5,'TMAX',F5.2)
910 FORMAT(21X,'CAS DELTA POSITIF')
920 FORMAT(21X,'CAS DELTA NUL')
930 FORMAT(21X,'CAS DELTA NEGATIF')
912 FORMAT(1H0,'A=',E12.5,'B=',E12.5,'C=',E12.5,'X1=',E12.5,'X2=',E12.
15)
932 FORMAT(1H0,'A=',E12.5,'B=',E12.5,'C=',E12.5,'X=',E12.5,'YC=',E12.
15,'YS=',E12.5)
950 FORMAT(1H0,'A1=',E14.7,'A2=',E14.7,'B1=',E14.7,'B2=',E14.7,'T=',F8
1.5)
960 FORMAT(1H0,'ITERATIONS SUR T SANS RESULTAT',5X,'T=',F10.5)
   CALL EXIT
   END

```

FEATURES SUPPORTED
IOCS

ANNEXE II - Calcul des solutions analytiques pour un système du
deuxième ordre - Entrée en échelon - Entrée en rampe.

```

C      SOLUTION ANALYTIQUE DEUXIEME ORDRE
      DIMENSION YA(20)
      DO 500 NJ=1,11
      READ(2,900)AB,TO,XL2,BET
      WRITE(5,901)
      WRITE(5,903)AB,TO,XL2,BET
      XL1=SQRT(XL2)
      IF(XL2-4.*BET)30,20,10
10     WRITE(5,910)
      WRITE(5,1200)
      RD=SQRT(XL2-4.*BET)
      S1=(-XL1+RD)/2.
      S2=(-XL1-RD)/2.
      A=1./BET
      B=(1.+TO*S1)/S1/(S1-S2)
      C=(1.+TO*S2)/S2/(S2-S1)
      WRITE(5,912)S1,S2,A,B,C
      DO 100 I=1,20
      T=I
100    YA(I)=AB*(A+B*EXP(S1*T)+C*EXP(S2*T))
      WRITE(5,1000)
      WRITE(5,1100)(YA(I),I=1,20)
C      ENTREE EN RAMPE
      D=1./BET
      A=(TO+D*(S1+S2))/BET
      C=(A*S1-D)/(S2-S1)
      B=-C-A
      WRITE(5,1300)
      WRITE(5,914)A,B,C,D
      DO110I=1,20
      T=I
110    YA(I)=AB*(D*T+A+B*EXP(S1*T)+C*EXP(S2*T))
      WRITE(5,1000)
      WRITE(5,1100)(YA(I),I=1,20)
      GOTG500
C      DELTA NUL
20     WRITE(5,920)
      WRITE(5,1200)
      S=-XL1/2.
      A=4./XL2
      B=TO-2./XL1
      C=-A
      WRITE(5,922)S,A,B,C
      DO 200 I=1,20
      T=I
200    YA(I)=AB*(A+(B*T+C)*EXP(S*T))
      WRITE(5,1000)
      WRITE(5,1100)(YA(I),I=1,20)
C      ENTREE EN RAMPE
      D=1./S/S
      A=(TO+2./S)*D
      C=-A
      B=S*(C+2.*A)-D
      WRITE(5,1300)
      WRITE(5,914)A,B,C,D

```



```

DO210I=1,20
T=I
210 YA(I)=AB*(D*T+A+(B*T+C)*EXP(S*T))
WRITE(5,1000)
WRITE(5,1100)(YA(I),I=1,20)
GOTO500
30 WRITE(5,930)
DELTA NEGATIF
WRITE(5,1200)
RS=-XL1/2.
XS=0.5*SQRT(4.*BET-XL2)
A=1./BET
B=-A
C=TO-XL1/BET
WRITE(5,932)RS,XS,A,B,C
DO300I=1,20
T=I
300 YA(I)=AB*(A+(B*COS(XS*T)+(C+B*RS)/XS*SIN(XS*T))*EXP(RS*T))
WRITE(5,1000)
WRITE(5,1100)(YA(I),I=1,20)
ENTREE EN RAMPE
D=1./(RS*RS+XS*XS)
A=(TO+2.*RS*D)*D
B=-A
C=2.*RS*A-D
WRITE(5,1300)
WRITE(5,914)A,B,C,D
DO310I=1,20
T=I
310 YA(I)=AB*(D*T+A+(B*COS(XS*T)+(C+B*RS)/XS*SIN(XS*T))*EXP(RS*T))
WRITE(5,1000)
WRITE(5,1100)(YA(I),I=1,20)
GOTO500
500 CONTINUE
900 FORMAT(4F15.5)
901 FORMAT(1H0,'SOLUTION ANALYTIQUE')
903 FORMAT(1H0,'AB=',F12.2,'TO=',F12.2,'ALPHA=',F12.2,'BETA=',F12.2)
910 FORMAT(1H0,'CAS DELTA POSITIF')
920 FORMAT(1H0,'CAS DELTA NUL')
930 FORMAT(1H0,'CAS DELTA NEGATIF')
1200 FORMAT(1H0,'ECHELON UNITE')
1000 FORMAT(1H,'VALEURS DE LA SORTIE')
1100 FORMAT(1H,'10F12.7)
912 FORMAT(1H0,'S1=',F10.4,'S2=',F10.4,'A=',F10.4,'B=',F10.4,'C=',F10.
14)
914 FORMAT(1H0,'A=',F12.5,'B=',F12.5,'C=',F12.5,'D=',F12.5)
1300 FORMAT(1H0,'ENTREE EN RAMPE')
922 FORMAT(1H0,'S=',F12.5,'A=',F12.5,'B=',F12.5,'C=',F12.5)
932 FORMAT(1H0,'RS=',F12.5,'XS=',F12.5,'A=',F12.5,'B=',F12.5,'C=',F12.
15)
CALL EXIT
END

```


ANNEXE III - Comparaison de l'erreur totale relative ε_{tr} à
l'erreur de chute relative ε_{cr} .

K = 2

$\beta = 2$

$\alpha = \sqrt{10}$

	t réel	2s	4s	6s	8s	10s
T = 0,1	ε_{tr}	0,0388427	0,0167464	0,0102642	0,0073331	0,0056898
	ε_{cr}	0,0175135	0,0025858	0,0004316	0,0000662	0,0000026
	$\varepsilon_{tr} - \varepsilon_{cr}$	0,0213292	0,0141606	0,0098326	0,0072669	0,0056872
T=0,05	ε_{tr}	0,0192296	0,0082787	0,0050661	0,0036139	0,0027974
	ε_{cr}	0,0085299	0,0012351	0,0001819	0,0000007	-0,0000299
	$\varepsilon_{tr} - \varepsilon_{cr}$	0,0106997	0,0070436	0,0048842	0,0036132	0,0028273
T=0,01	ε_{tr}	0,0028610	0,0008131	0,0002865	0,0000219	-0,0000609
	ε_{cr}	0,0006277	-0,0006909	-0,0008429	-0,0008634	-0,0006616
	$\varepsilon_{tr} - \varepsilon_{cr}$	0,0022333	0,0015040	0,0011294	0,0008853	0,0006007
T=0,005	ε_{tr}	-0,0010670	-0,0018243	-0,0017410	-0,0018694	-0,0016770
	ε_{cr}	-0,0023288	-0,0029255	-0,0031416	-0,0027151	-0,0021572
	$\varepsilon_{tr} - \varepsilon_{cr}$	0,0012618	0,0011012	0,0014006	0,0008457	0,0005402
T=0,001	ε_{tr}	-0,0789549	-0,0653396	-0,0504444	-0,0587952	-0,0345998
	ε_{cr}	-0,0834267	-0,0383062	-0,0064559	-0,0024618	-0,0017697
	$\varepsilon_{tr} - \varepsilon_{cr}$	0,0053718	-0,0270334	-0,0439885	-0,0563334	-0,0328301

$$K = 1$$

$$P = 1$$

$$\alpha = \sqrt{6}$$

	t réel	2s	4s	6s	8s	10s
T = 0,1	ε_{tr}	0,0434019	0,0191407	0,0116310	0,0081619	0,0062256
	ε_{cr}	0,0297520	0,0077790	0,0025306	0,0008790	0,0003165
	$\varepsilon_{tr} - \varepsilon_{cr}$	0,0136499	0,0113617	0,0091004	0,0072829	0,0059091
T=0,05	ε_{tr}	0,0216085	0,0095384	0,0058068	0,0040932	0,0031240
	ε_{cr}	0,0146879	0,0038634	0,0012778	0,0004614	0,0001944
	$\varepsilon_{tr} - \varepsilon_{cr}$	0,0069206	0,0056750	0,0045290	0,0036318	0,0029296
T=0,01	ε_{tr}	0,0044938	0,0024064	0,0018526	0,0019257	0,0015519
	ε_{cr}	0,0032920	0,0015221	0,0011160	0,0009615	0,0008611
	$\varepsilon_{tr} - \varepsilon_{cr}$	0,0012018	0,0008843	0,0007365	0,0009642	0,0006908
T=0,005	ε_{tr}	0,0024270	0,0023740	0,0029513	0,0041894	0,0035099
	ε_{cr}	0,0026159	0,0035462	0,0035512	0,0034469	0,0034384
	$\varepsilon_{tr} - \varepsilon_{cr}$	-0,0001889	-0,0011722	-0,0005999	0,0076363	0,0000715
T=0,001	ε_{tr}	0,0055548	0,0399138	0,0595840	0,0933876	0,0836889
	ε_{cr}	0,0265969	0,0798874	0,0862802	0,0891314	0,0890057
	$\varepsilon_{tr} - \varepsilon_{cr}$	-0,0210421	-0,0399736	-0,0266962	0,0042562	-0,0053168

$K = 1$

$\beta = 1$

$\alpha = \sqrt{4}$

	t réel	2s	4s	6s	8s	10s
T = 0,1	ξ_{tr}	0,0443574	0,0185918	0,0110828	0,0077633	0,0059518
	ξ_{cr}	0,0288021	0,0050635	0,0017084	0,0001796	0,0000445
	$\xi_{tr} - \xi_{cr}$	0,0155553	0,0135283	0,0093744	0,0075837	0,0059073
T=0,05	ξ_{tr}	0,0225920	0,0091590	0,0052829	0,0037482	0,0029222
	ξ_{cr}	0,0142012	0,0025372	0,0012847	0,0001479	0,0000779
	$\xi_{tr} - \xi_{cr}$	0,0083908	0,0066218	0,0039982	0,0036003	0,0028445
T=0,01	ξ_{tr}	0,0049308	0,0029918	0,0025247	0,0025015	0,0021798
	ξ_{cr}	0,0037926	0,0019939	0,0023346	0,0014964	0,0014715
	$\xi_{tr} - \xi_{cr}$	0,0011382	0,0009979	0,0001901	0,0010051	0,0007083
T=0,005	ξ_{tr}	0,0036112	0,0039421	0,0047620	0,0056942	0,0052463
	ξ_{cr}	0,0039433	0,0044730	0,0050905	0,0043242	0,0042343
	$\xi_{tr} - \xi_{cr}$	-0,0003321	-0,0008309	-0,0003285	0,0013700	0,0010120
T=0,001	ξ_{tr}	0,1030588	0,1586480	0,1933459	0,2256174	0,2261936
	ξ_{cr}	0,1484439	0,2254526	0,2439269	0,2460050	0,2469030
	$\xi_{tr} - \xi_{cr}$	-0,0453751	-0,0668046	-0,0505810	-0,0203876	-0,0207094

$$K = 2 \quad , \quad \beta = 2 \quad , \quad \alpha = \sqrt{4}$$

	t réel	2s	4s	6s	8s	10s
T = 0,1	ε_{tr}	0,0380133	0,0147120	0,0092323	0,0067921	0,0053654
	ε_{cr}	0,0075506	-0,0026762	0,0001747	0,0000431	0,0000079
	$\varepsilon_{tr} - \varepsilon_{cr}$	0,0304627	0,0173882	0,0090576	0,0067490	0,0053575
T=0,05	ε_{tr}	0,0188792	0,0073351	0,0046295	0,0034163	0,0027214
	ε_{cr}	0,0034846	-0,0012374	0,0001341	0,0000641	0,0000684
	$\varepsilon_{tr} - \varepsilon_{cr}$	0,0153946	0,0085755	0,0044954	0,0033522	0,0026530
T=0,01	ε_{tr}	0,0037885	0,0023058	0,0021523	0,0017004	0,0019294
	ε_{cr}	0,0011777	0,0018057	0,0012567	0,0010469	0,0009651
	$\varepsilon_{tr} - \varepsilon_{cr}$	0,0026108	0,0005001	0,0008956	0,0006535	0,0009643
T=0,005	ε_{tr}	0,0033677	0,0054207	0,0067227	0,0060107	0,0074398
	ε_{cr}	0,0041197	0,0096176	0,0062410	0,0057692	0,0059758
	$\varepsilon_{tr} - \varepsilon_{cr}$	-0,0007520	-0,0041969	0,0004817	0,0002415	0,0014640
T=0,001	ε_{tr}	0,0211315	0,0720607	0,0934110	0,0842342	0,0944959
	ε_{cr}	0,0506685	0,0922936	0,0807561	0,0816525	0,0820808
	$\varepsilon_{tr} - \varepsilon_{cr}$	-0,0295370	-0,0202329	0,0126549	0,0025817	0,0124151

$$K = 2$$

$$\beta = 2$$

$$\alpha = \sqrt{2}$$

	t réel	2s	4s	6s	8s	10s
T = 0,1	ε_{tr}	0,0377139	0,0129609	0,0087719	0,0065624	0,0052087
	ε_{cr}	-0,0001116	-0,0057603	0,0021490	-0,0004401	0,0000653
	$\varepsilon_{tr} - \varepsilon_{cr}$	0,0378255	0,0187212	0,0066229	0,0070025	0,0051434
T=0,05	ε_{tr}	0,0187383	0,0064649	0,0043942	0,0033014	0,0026389
	ε_{cr}	-0,0004796	-0,0033172	0,0010752	-0,0001672	0,0000768
	$\varepsilon_{tr} - \varepsilon_{cr}$	0,0192179	0,0097821	0,0033190	0,0034686	0,0025621
T=0,01	ε_{tr}	0,0042060	0,0026040	0,0025607	0,0020414	0,0024169
	ε_{cr}	0,0012271	0,0020085	0,0013550	0,0016456	0,0014399
	$\varepsilon_{tr} - \varepsilon_{cr}$	0,0029789	0,0005955	0,0012057	0,0003958	0,0009770
T=0,005	ε_{tr}	0,0042035	0,0066410	0,0075953	0,0063487	0,0089123
	ε_{cr}	0,0059039	0,0108251	0,0051218	0,0064113	0,0061991
	$\varepsilon_{tr} - \varepsilon_{cr}$	-0,0017004	-0,0041841	0,0024735	-0,0000626	0,0027132
T=0,001	ε_{tr}	0,0005623	0,0791162	0,0960165	0,0738242	0,1070984
	ε_{cr}	0,0221657	0,1109882	0,0559085	0,0790566	0,0724281
	$\varepsilon_{tr} - \varepsilon_{cr}$	-0,0216034	-0,0318720	0,0401080	-0,0052324	0,0346703

ANNEXE IV - Système du quatrième ordre.

Calcul des coefficients de la récurrence pour un système du quatrième ordre. (chapitre VI).

On cherche les coefficients de la transformée en z ,

$$F(z) = \frac{a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}}$$

de la transmittance

$$B_o(s), C(s), F(s) = \frac{(1 - e^{-Ts})}{s} \frac{a \beta (1 + \gamma s)}{s(1 + \alpha s)(s^2 + \lambda s + 1)}$$

y compris le bloqueur d'ordre zéro.

$$\underline{1) \text{ Racines réelles } \lambda^2 - 4 > 0}$$

On a, après décomposition en éléments simples et transformation de chaque élément

$$F(z) = a \beta (1 - z^{-1}) \left[\frac{A \cdot T \cdot z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} + \frac{B}{1 - z^{-1}} + \frac{C}{\alpha (1 - e^{-T/\alpha} \cdot z^{-1})} + \frac{D}{1 - e^{s_1 T} \cdot z^{-1}} + \frac{E}{1 - e^{s_2 T} \cdot z^{-1}} \right]$$

avec

$$s_1 = \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \quad \text{et} \quad s_2 = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

$$A = 1 \quad , \quad C = \frac{\alpha^3(\alpha - \beta)}{\alpha^2 - \lambda \cdot \alpha + 1} \quad , \quad D = \frac{1 + \beta s_1}{s_1^2(1 + \alpha s_1)(s_1 - s_2)}$$

$$E = \frac{1 + \beta s_2}{s_2^2(1 + \alpha s_2)(s_2 - s_1)} \quad \text{et} \quad B = -\left(D + E + \frac{C}{\alpha}\right)$$

ce qui donne, en réduisant au même dénominateur :

$$(\text{on pose } x = \exp(-T/\alpha) \quad , \quad x_1 = \exp(s_1 \cdot T) \quad , \quad x_2 = \exp(s_2 \cdot T))$$

$$b_1 = -(1 + x + x_1 + x_2)$$

$$b_2 = x \cdot x_1 + x \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 + x$$

$$b_3 = -(x \cdot x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 + x \cdot x_1 + x \cdot x_2)$$

$$b_4 = x \cdot x_1 \cdot x_2$$

et

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = \alpha \beta \left[T - B \cdot b_1 - \frac{C}{\alpha} (2 + x_1 + x_2) - D(2 + x + x_2) - E(2 + x + x_1) \right]$$

$$a_2 = \alpha \beta \left[-T(x \cdot x_1 + x_2) + B \cdot b_2 + \frac{C}{\alpha} (1 + 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2) + D(1 + 2 \cdot x + 2 \cdot x_2 + x \cdot x_2) \right. \\ \left. + E(1 + 2 \cdot x + 2 \cdot x_1 + x \cdot x_1) \right]$$

$$a_3 = \alpha \beta \left[T(x \cdot x_1 + x \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2) - B \cdot b_3 - \frac{C}{\alpha} (x_1 + x_2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2) - D(x + x_2 + 2 \cdot x \cdot x_2) \right. \\ \left. - E(x + x_1 + 2 \cdot x \cdot x_1) \right]$$

$$a_4 = \alpha \beta \left[-T(x \cdot x_1 \cdot x_2) + B \cdot b_4 + \frac{C}{\alpha} \cdot x_1 \cdot x_2 + D \cdot x \cdot x_2 + E \cdot x \cdot x_1 \right]$$

$$\underline{2) \text{ Racine double } \lambda^2 - 4 = 0 \quad \text{soit } \lambda = 2}$$

On obtient après transformation de la décomposition en éléments simples

$$F(z) = a\beta (1-z^{-1}) \left[\frac{A \cdot T \cdot z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{B}{1-z^{-1}} + \frac{C}{\alpha (1-e^{-T/\alpha} \cdot z^{-1})} + \frac{D \cdot T \cdot e^{-T} \cdot z^{-1}}{(1-e^{-T} \cdot z^{-1})^2} + \right.$$

$$\text{avec} \quad A = 1 \quad D = \frac{1 - \zeta}{1 - \alpha} \quad \left. + \frac{E}{(1-e^{-T} \cdot z^{-1})} \right]$$

$$B = \zeta - \alpha - 2$$

$$E = \frac{1 - \zeta + 2\alpha\zeta - \alpha^2 - \alpha}{(1 - \alpha)^2}$$

$$C = \frac{\alpha^3(\alpha - \zeta)}{(\alpha - 1)^2}$$

Après arrangement des termes, on obtient les coefficients

(on pose : $x = \exp(-T/\alpha)$, $xt = \exp(-T)$)

$$b_1 = -(1 + x + 2 \cdot xt)$$

$$b_2 = 2 \cdot x \cdot xt + xt^2 + x + 2 \cdot xt$$

$$b_3 = -(2 \cdot x \cdot xt + xt^2 + x \cdot xt^2)$$

$$b_4 = x \cdot xt^2$$

et pour le numérateur

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = a\beta \left[T + B \cdot b_1 - 2 \cdot \frac{C}{\alpha} (1 + xt) + D \cdot T \cdot xt - E(2 + x + xt) \right]$$

$$a_2 = a\beta \left[-T(x + 2 \cdot xt) + B \cdot b_2 + \frac{C}{\alpha} (1 + 4 \cdot xt + xt^2) - D \cdot T \cdot xt(2 + x) + E(1 + 2 \cdot x + 2 \cdot xt + x \cdot xt) \right]$$

$$a_3 = a\beta \left[T \cdot (2 \cdot x \cdot xt + xt^2) + B \cdot b_3 - 2 \cdot \frac{C}{\alpha} (1 + xt)xt + D \cdot T \cdot xt(1 + 2 \cdot x) - E(x + xt + 2 \cdot x \cdot xt) \right]$$

$$a_4 = a\beta \left[-T \cdot x \cdot xt^2 + B \cdot b_4 + \frac{C}{\alpha} xt^2 - D \cdot T \cdot x \cdot xt + E \cdot x \cdot xt \right]$$

3) Racines complexes $\lambda^2 - 4 < 0$

On obtient

$$F(z) = a\beta (1-z^{-1}) \left[\frac{A \cdot T \cdot z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{B}{1-z^{-1}} + \frac{C}{\alpha(1-e^{-T/\alpha} z^{-1})} + \frac{D(1-e^{aT} \cos bT \cdot z^{-1}) + \frac{E+aD}{b} \cdot e^{aT} \sin bT \cdot z^{-1}}{1 - 2e^{aT} \cos bT z^{-1} + e^{2aT} z^{-2}} \right]$$

avec

$$a = -\frac{\lambda}{2} \quad b = \frac{\sqrt{4 - \lambda^2}}{2}$$

$$A = 1$$

$$D = \frac{\alpha + \lambda - \zeta + \lambda \cdot \alpha \cdot \zeta - \lambda^2 \alpha}{\alpha^2 - \lambda \cdot \alpha + 1}$$

$$B = \zeta - \alpha - \lambda$$

$$C = \frac{\alpha^3(\alpha - \zeta)}{\alpha^2 - \lambda \cdot \alpha + 1}$$

$$E = -[1 + C + \lambda\alpha + B(\lambda + \alpha)]$$

ce qui donne, en posant

$$v = \exp(a, T)$$

$$E1 = \frac{E + aD}{b}$$

$$x = \exp(-T/\alpha)$$

et

$$y_c = \cos bT \cdot \exp(aT)$$

$$y_s = \sin bT \cdot \exp(aT)$$

$$b_1 = -(1 + x + 2 \cdot y_c)$$

$$b_2 = v^2 + 2 \cdot x \cdot y_c + 2 \cdot y_c + x$$

$$b_3 = -(x \cdot v^2 + v^2 + 2 \cdot x \cdot y_c)$$

$$b_4 = x \cdot v^2$$

et pour les coefficients du numérateur :

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = a\beta \left[T + B.b_1 - 2.\frac{C}{\alpha}(1 + yc) - D(2 + x + yc) + E1.ys \right]$$

$$a_2 = a\beta \left[-T(x + 2.yc) + B.b_2 + \frac{C}{\alpha}(1 + 4.yc + v^2) + D(1 + 2.x + 2.yc + x.yc) - E1.yc(2 + x) \right]$$

$$a_3 = a\beta \left[T(v^2 + 2.x.yc) + B.b_3 - 2.\frac{C}{\alpha}(v^2 + yc) - D(x + yc + 2.x.yc) + E1.ys(1 + 2.x) \right]$$

$$a_4 = a\beta \left[-T.x.v^2 + B.b_4 + \frac{C}{\alpha}.v^2 + D.x.yc - E1.ys.x \right]$$

Le programme complet, écrit en Fortran, correspondant au calcul des coefficients dans les trois cas précédents, et au déroulement de la récurrence, est donné par les photocopies des pages suivantes.

*


```

DIMENSION CR(100),JR(100)
DO 500NJ=1,2
READ(2,900)AB,TJ,XL2,ALFA,T,M,VIPI
WRITE(5,903)ALFA,AB,TJ,XL2,T,M,VIPI
INITIALISATION A ZERO
C1=0.
C2=0.
C3=0.
C4=0.
J1=0.
J2=0.
J3=0.
J4=0.
CM=0.
TEST SJR DELTA
IF(XL2-4.)30,20,10
10 WRITE(5,910)
XL1=SQRT(XL2)
RD=SQRT(XL2-4.)
S1=(-XL1-RD)/2.
S2=(-XL1+RD)/2.
X1=EXP(S1*T)
X2=EXP(S2*T)
X=EXP(-T/ALFA)
CC=ALFA**3.*(ALFA-TJ)/((ALFA-XL1)*ALFA+1.)
D=(1.+TJ*S1)/(1.+ALFA*S1)/(S1-S2)/S1/S1
E=(1.+TJ*S2)/(1.+ALFA*S2)/(S2-S1)/S2/S2
B=-D-E-CC/ALFA
B1=-(1.+X+X1+X2)
B2=X*(X1+X2+1.)+X1+X2+X1*X2
B3=-X*(X1+X2+X1*X2)-X1*X2
B4=X*X1*X2
JT1=T
JT2=-T*(X+X1+X2)
JT3=T*(X*X1+X*X2+X1*X2)
JT4=-T*X*X1*X2
JB1=B*B1
JB2=B*B2
JB3=B*B3
JB4=B*B4
XK=CC/ALFA
JK1=-XK*(2.+X1+X2)
JK2=XK*(1.+2.*X1+2.*X2+X1*X2)
JK3=-XK*(X1+X2+2.*X1*X2)
JK4=XK*X1*X2
JD1=-D*(2.+X+X2)
JD2=D*(1.+2.*X+2.*X2+X*X2)
JD3=-D*(X+X2+2.*X*X2)
JD4=D*X*X2
UE1=-E*(2.+X+X1)
JE2=E*(1.+2.*X+2.*X1+X*X1)
JE3=-E*(X+X1+2.*X*X1)
UE4=E*X*X1
GOTO50

```



```

20 WRITE(5,920)
  B=TJ-ALFA-2.
  CC=ALFA**3.*(ALFA-TJ)/(ALFA-1.)/(ALFA-1.)
  D=(1.-TJ)/(1.-ALFA)
  E=(2.-TJ+ALFA*(2.*TJ-3.))/(1.-ALFA)/(1.-ALFA)
  XK=CC/ALFA
  X=EXP(-T/ALFA)
  XT=EXP(-T)
  B1=-(1.+X+2.*XT)
  B2=2.*X*XT+XT*XT+X+2.*XT
  B3=-(2.*X*XT+XT*XT+X*XT*XT)
  B4=X*XT*XT
  JT1=T
  JT2=-T*(X+2.*XT)
  JT3=T*(2.*X*XT+XT*XT)
  JT4=-T*X*XT*XT
  JB1=B*B1
  JB2=B*B2
  JB3=B*B3
  JB4=B*B4
  JK1=-2.*XK*(1.+XT)
  JK2=XK*(1.+XT*(XT+4.))
  JK3=-2.*XK*XT*(1.+XT)
  JK4=XK*XT*XT
  TD=D*T*XT
  JD1=TD
  JD2=-TD*(2.+X)
  JD3=TD*(1.+2.*X)
  JD4=-TD*X
  JE1=-E*(2.+X+XT)
  JE2=E*(1.+2.*X+XT*(2.+X))
  JE3=-E*(X+XT*(1.+2.*X))
  JE4=E*X*XT
  GOTD50
30 WRITE(5,930)
  XL1=SQRT(XL2)
  B=TJ-ALFA-XL1
  CC=ALFA**3.*(ALFA-TJ)/(ALFA*ALFA-ALFA*XL1+1.)
  D=(-B+TJ*XL1*ALFA-ALFA*XL2)/(ALFA*ALFA-ALFA*XL1+1.)
  E=-(1.+CC+XL1*ALFA+B*(XL1+ALFA))
  A=-XL1/2.
  BB=0.5*SQRT(4.-XL2)
  V=EXP(A*T)
  V2=EXP(2.*A*T)
  YC=V*COS(BB*T)
  YS=V*SIN(BB*T)
  XK=CC/ALFA
  X=EXP(-T/ALFA)
  E1=(E+A*D)/BB
  B1=-(1.+X+2.*YC)
  B2=V2+2.*YC*(X+1.)+X
  B3=-(X*(V2+2.*YC)+V2)
  B4=X*V2

```



```

UT1=T
UT2=-T*(X+2.*YC)
UT3=T*(V2+2.*YC*X)
UT4=-T*X*V2
UB1=B*B1
UB2=B*B2
UB3=B*B3
UB4=B*B4
UK1=-XK*2.*(1.+YC)
UK2=XK*(V2+4.*YC+1.)
UK3=-XK*2.*(V2+YC)
JK4=XK*V2
UD1=-D*(2.+X+YC)
UD2=D*(1.+2.*X+YC*(2.+X))
UD3=-D*(X+YC*(1.+2.*X))
UD4=D*X*YC
UE1=E1*YS
UE2=-E1*YS*(2.+X)
UE3=E1*YS*(1.+2.*X)
UE4=-E1*YS*X
GOTO50
50 CONTINUE
A1=AB*(UT1+UB1+UK1+UD1+UE1)
A2=AB*(UT2+UB2+UK2+UD2+UE2)
A3=AB*(UT3+UB3+UK3+UD3+UE3)
A4=AB*(UT4+UB4+UK4+UD4+UE4)
WRITE(5,901)A1,A2,A3,A4,B1,B2,B3,B4
I=1
J=1
K=1
60 CONTINUE
R=1.
C=A1*U1+A2*U2+A3*U3+A4*U4-B1*C1-B2*C2-B3*C3-B4*C4
U=R-C
J4=U3
U3=U2
U2=U1
U1=U
C4=C3
C3=C2
C2=C1
C1=C
IF(CM-C)70,80,80
70 CM=C
IMAX=I
GOTO80
80 IF(K-VIPI)90,100,100
100 K=0
CR(J)=C
UR(J)=U
J=J+1
GOTO90
90 IF(I-M)110,120,120
110 I=I+1
K=K+1
GOTO60

```



```

120 WRITE(5,1000)
   WRITE(5,1100)(CR(J),J=1,100)
   WRITE(5,1300)
   WRITE(5,1100)(UR(J),J=1,100)
   WRITE(5,1400)
   WRITE(5,1500)CM,IMAX
500 CONTINUE
900 FORMAT(5F12.5,2I10)
901 FORMAT(1H0,'A1=',E12.5,'A2=',E12.5,'A3=',E12.5,'A4=',E12.5,'B1=',
1E12.5,'B2=',E12.5,'B3=',E12.5,'B4=',E12.5)
903 FORMAT(1H0,3X,F9.5,7X,F9.5,6X,F9.5,6X,F9.5,6X,F9.5,6X,I5,7X,I4)
910 FORMAT(21X,'CAS DELTA POSITIF')
/ 920 FORMAT(21X,'CAS DELTA NUL')
930 FORMAT(21X,'CAS DELTA NEGATIF')
1000 FORMAT(1H0,'VALEURS DE LA SORTIE CV')
1300 FORMAT(1H0,'VALEURS DU SIGNAL UV')
1100 FORMAT(1H ,10F12.7)
1400 FORMAT(1H0,15X,'CM=',12X,'IMAX=')
1500 FORMAT(1H+,18X,F10.5,7X,I6)
   CALL EXIT
   END

```

FEATURES SUPPORTED
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
COMMON 0 VARIABLES 562 PROGRAM 2072

END OF COMPILATION

// XEQ

ANNEXE V - Simulation d'un circuit R. L. C. à inductances fortement non linéaires.

Le programme utilise les désignations suivantes

$$A \rightarrow A$$

$$\frac{1}{C} \rightarrow C1$$

$$R \rightarrow R$$

$$\Phi_n \rightarrow FI$$

$$\Phi_{n-1} \rightarrow FI1$$

$$\Phi_o \rightarrow FIO$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dt} \right)_n \rightarrow DFI$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dt} \right)_{n-1} \rightarrow DFI1$$

$$t_f \rightarrow T0$$

$$i_n \rightarrow Y$$

$$i_{n-1} \rightarrow Y1$$

$$\omega \rightarrow \phi M$$

$$\left(\frac{1}{C} \int i dt \right)_n \rightarrow V$$

$$\left(\frac{1}{C} \int i dt \right)_{n-1} \rightarrow V1$$

$$V_o \rightarrow VO$$

```
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*IOCS(CARD,1403PRINTER,DISK)
  DIMENSION YR(300),FIR(300)
C    SYSTEMES NON LINEAIRES
  DC 500 NJ=1,2
  READ(2,800)C1,R,Q0,A,FIO,T0,OM,T,M,NIP1
  WRITE(5,850)C1,R,Q0,A,FIO,T0,OM,T,M,NIP1
C    INITIALISATION A ZERO
  DFI1=0.
  FI1=FIO
  V1=C1*Q0
  Y1=0.
C    DEBUT ITERATIONS
  I=1
  J=1
  K=1
100 CONTINUE
  XI=I
  AR=OM*(T0+XI*T)
  E=A*SIN(AR)
  FI=T*DFI1+FI1
  IF(FI)10,20,30
10 IF(FI+0.2)12,15,15
15 Y=0.01*FI
  GOT060
12 Y=1.6*FI+0.318
  GOT060
20 Y=0.
  GOT060
30 IF(FI-0.2)32,35,35
35 Y=1.6*FI-0.318
  GOT060
32 Y=0.01*FI
  GOT060
60 CONTINUE
  V=C1*Y1*T+V1
  DFI=F-R*Y-V
```



```

C      TRANSFERT DES RESULTATS
      FI1=FI
      V1=V
      DF11=DFI
      Y1=Y
      IF(K-NIPI)80,70,70
70     K=0
      YR(J)=Y
      FIR(J)=FI
      J=J+1
      GOTO80
30     IF(I-M)90,95,95
90     I=I+1
      K=K+1
      GOTO100
95     WRITE(5,810)
      WRITE(5,820)(YR(J),J=1,300)
      WRITE(5,830)
      WRITE(5,820)(FIR(J),J=1,300)
500    CONTINUE
800    FORMAT(8F9.4,I5,I3)
810    FORMAT(1H0,'VALEURS DU COURANT I')
820    FORMAT(1H ,10F12.5)
830    FORMAT(1H0,'VALEURS DU FLUX FI')
850    FORMAT(1H0,8F10.4,2I6)
      CALL EXIT
      END

```

FEATURES SUPPORTED
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
COMMON C VARIABLES 1252 PROGRAM 416

END OF COMPILATION

// XEQ

ANNEXE VI - Simulation de l'équation de Van der Pol.

```

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*IOCS(CARD,1403PRINTER,DISK)
  DIMENSION Y(300) ,DY(300)
C   VAN DER POL
  DO 500 NJ=1,3
    READ(2,900)EPS,YO,DYO,TF,T
C   CALCUL DE M ET NIPI
    RM=TF/T
    M=RM
    NIPI=M/300
    WRITE(5,901)EPS,YO,DYO,T,M,NIPI
    IF(EPS-2.)30,20,10
20  WRITE(5,920)
    GOTO500
10  WRITE(5,910)EPS
    DELT=SQRT(EPS*EPS-4.)
    S1=(EPS+DELT)/2.
    S2=(EPS-DELT)/2.
    A=1./(S1-S2)
    B=-A
    C=(S1-EPS)/(S1-S2)
    D=(S2-EPS)/(S2-S1)
    X1=EXP(S1*T)
    X2=EXP(S2*T)
    P10=-(C*X2+D*X1)
    P11=-(A*X2+B*X1)
    P1=-EPS*P11/3.
    P2=-P1
    Q1=-X1-X2
    Q2=X1*X2
    GOTO50
30  WRITE(5,930)EPS
    RS=EPS/2.
    XS=0.5*SQRT(4.-EPS*EPS)
    X=EXP(RS*T)
    YS=SIN(XS*T)
    YC=COS(XS*T)
    P10=X*(RS*YS/XS-YC)
    P1=-EPS*X*YS/XS/3.
    P2=-P1
    Q1=-2.*X*YC
    Q2=X*X
    P11=X*YS/XS
    GOTO50
50  CONTINUE
    WRITE(5,950)P1,P2,Q1,Q2,P11

```



```

C      INITIALISATION DES DEUX PREMIERES VALEURS DE Y ET DE R=Y**3.
C      Y1=VALEUR DE Y POUR (N-1)T,Y2 POUR (N-2)T.DEBUT ITERATION POUR N=2
      Y2=Y0
      R2=Y0**3
      Y1=Y0*(P10-Q1)+P11*DY0+P1*R2
      R1=Y1**3
C      DEBUT RECURRENCE N=2
      I=
      K=2
      J=1
60    CONTINUE
      YN=P1*R1+P2*R2-Q1*Y1-Q2*Y2
      R=Y,**3
C      TRANSFERT
      R2=R1
      R1=R
      Y2=Y1
      Y1=YN
      IF(K-NIPI)90,100,100
100   K=0
      Y(J)=YN
      DY(J)=(Y1-Y2)/T
      J=J+1
      T=T0
90   IF(I=0)110,120,120
110   I=I+1
      K=K+1
      GOTO60
120   WRITE(5,1000)
      WRITE(5,1100)(Y(J),J=1,300)
      WRITE(5,1010)
      WRITE(5,1100)(DY(J),J=1,300)
500   CONTINUE
900   FORMAT(6F10.5)
901   WRITE(4,1001),EPS=' ',F10.3,'Y=' ',F10.3,'DY0=' ',F10.3,'T=' ',F8.4,'M=' ',I6
      1,'NIPI=' ',I6)
910   FORMAT(1H0,'DELTA POSITIF.EPSILON=' ',F5.2)
920   FORMAT(1H0,'DELTA NEG CAS NON PREVU,ARRET')
930   FORMAT(1H0,'DELTA NEGATIF.EPSILON=' ',F5.2)
950   FORMAT(1H0,'P1=' ',E12.5,'P2=' ',E12.5,'Q1=' ',E12.5,'Q2=' ',E12.5,'P11=' ',
      1E12.5)
1000  FORMAT(1H0,'VALEURS DE Y')
1010  FORMAT(1H0,'VALEURS DE LA DERIVEE DY')
1100  FORMAT(1H ,10F12.7)
      CALL EXIT
      END

```


Vu, et Permis d'imprimer,
Nancy, le 5 NOV. 1970

Le Doyen,
J. AUBRY.

